Matematikai Lapok

1998-99/1-2

// MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 8–9. évfolyam (1998–99), 1–2. szám

(Megjelent 2003-ban)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

KŐVÁRY KÁROLY (1923–2003)

Kőváry Károlyt szinte mindenki Kavicsként vagy Kavics tanár úrként ismerte. Nevét, melyet még első iskolájában kapott, büszkén viselte, hiszen tanítványaitól kapta. S hogy mit kaptak tőle diákjai, kollégái s mindazok, akik a közelében lehettek? Kaptunk tőle tudást, és megtanított a matematika szeretetére, elsősorban a geometria szeretetére. A geometria a matematika művészete, mondta. De tanulhattunk tőle történelmet is. A Laricsev feladatait sokszor így adta fel: III. Béla uralkodásának második éve, és nevetve megvárta, amíg kitotózzuk, melyik feladatra is gondolt. „Gondolataidat nyom nélkül elröppenni ne hagyd", idézte Kölcseyt, ha valakinek jó ötlete volt, de nem akarta leírni a füzetébe. És hosszan sorolhatnám, hogy mi mindent tanított meg észrevétlenül. De sokkal fontosabb, amit mindezen túl, mindezek előtt a legszemélyesebben kaptunk tőle. Aki ismerte, akit tanított, az tudja, hogy milyen jó volt tudni, hogy van egy biztos pont az életünkben, akit úgy hívnak: Kavics, akinek bátorító szavára, feszültségoldó mosolyára, tüzes vidámságára a legrosszabb pillanatainkban is számíthattunk. Számíthattunk ingyen, és anélkül hogy bármit is szólnunk kellett volna. Nehéz erről beszélni, amikor még olyan közel van a megdöbbentő és szinte felfoghatatlan hír, hogy az, aki ilyen biztonságot, bizalmat és erőt sugárzott magából, meghalt. A megszokás majdnem azt mondatta velem: többé nincs közöttünk – de a megszokás pontatlan és megbízhatatlan fogalmazó. Mert nem igaz, hogy Kavics nincs közöttünk. Kevés ember van, akiről ilyen biztosan mondhatjuk, hogy most is közöttünk van, amikor pedig hiánya nagyon is fájdalmasan hasít belénk.

Ez az ellentmondás nem hagy nyugodni, és arra kényszerít, hogy ne érjem be azzal a nagyon is sokmindennel, amit könnyű elmondani róla, hanem megpróbáljam fölidézni azt a legfontosabbat, amit Kavics jelent nekem és nekünk, mindazoknak, akik a közelében élhettek. Mert a végtelenségig lehetne idézni azokat a mozzanatokat, amelyekkel olyan otthonossá tette a matematikaórát mindenki számára, hiszen minden tanítványa őriz ilyen emléket. Számtalan, nem kifejezetten matematikai érdeklődésű tanítványával tudta megízleltetni a matematikai felfedezés örömét, és tudta így beavatni őket a matematika szépségébe. És nem titok, de végre nyilvánosan ki kell mondani, hogy a Fazekas Gimnáziumból nélküle nem lett volna az, ami, hogy a Fazekas matematika tagozata azért képvisel ma is világszínvonalat, mert Kavics az alatt a majdnem 30 év alatt, amelyet ott tanított, *iskolát teremtett.* Ő honosította meg a műhelymunkának azt a hangulatát, amely olyan otthonossá tette az óráit. Nem véletlenül ő kapta – Urbán Jánossal együtt – az első Rátz tanár úr díjat: mert ami Rátz tanár úr volt az egykori Fasori Gimnáziumnak, az Kavics a Fazekasnak.

De a legfontosabbat még ezzel sem mondtam el. Mert a legfontosabbról, amit tanulni lehetett tőle, nehezebb beszélni. Azt ugyanis szinte észrevétlenül, mert magától értetődően adta, sugározta magából. Az igazi szeretet nem látható, és nem hivalkodik. Éppen ezért Kavics közelében mindenki megértőbb, türelmesebb lett, mert „ráragadt" valami Kavics természetéből. Kire több, kire kevesebb, érzékenységének megfelelően. S hányszor kérdeztük meg magunktól csendben: vajon mennyi „ragadt ránk" Kavics szeretetének tágasságából és erejéből? Mert a legfontosabbra, amit Kavics sugárzott magából, ez a megfelelő kifejezés: *szeretetének tágassága és ereje*. Ez az, ami mindig közöttünk marad. Ez a szeretet *mindenkit elfogadott* és *mindenkinek erőt adott a növekedéshez.*

Mindenkit elfogadott, akiben a legkisebb csíráját is látta a növekedésnek, és végtelen türelme volt, mert tudta: a növekedés mennyi belső konfliktussal jár. Sosem értette a türelmetlen, követelődző tanárokat, akik nem értik, hogy a növekedéshez tér kell, és teret csak a szeretet teremt. És csak az a szeretet teremt teret, amelyik nem tolakodó. Lao-cse, az egyik legrégibb kínai mester mondja, hogy az igazi bölcs *nagyra nevel, és nem uralkodik.* Kevesen vannak, akik úgy tudnak nevelni és vezetni másokat, hogy nem uralkodnak rajtuk. Kavicstól ezt lehetett tanulni. Vajon mennyire sikerült ezt megtanulnunk, ellesnünk Tőle?

Kavics tágas szeretete *mindenkiben látta és tisztelte az egyéniséget.* A legnehezebben kezelhető és a legmakacsabb diákjait is megszelidítette, mert azt látta bennük, ami erősödni, növekedni akar. Mindenki egyéniségét tisztelte, de csak mosolyogna azon, aki *csak elvből* tiszteli mindenkiben az egyéniséget. Mert az egyéniség tisztelete nála sokkal mélyebbről, a természetéből fakadt, s mert ösztönösen tudta, hogy sokkal mélyebben kell hozzá ismerni és tisztelni az emberi lét konfliktusait, s hogy ez az ismeret elvekkel nem helyettesíthető.

Kavics *szeretete erőt adott a növekedéshez.* Talán ez volt az, amit a legjobban szeretett és kifejezetten élvezett tanítványaiban: amikor látta, hogyan növekednek, hogyan sikerül legyőzni a makacsul ellenálló nehézséget egy még nagyobb makacssággal. Amikor látta felcsillanni a szemükben az értelmet. Maga is csillogó szemmel tudott beszélni arról, ha még állni alig tudó „pótunokájának" hosszú küzdelem után sikerült végre kidobnia a labdát a rácsos ágyból, vagy ha tanítványának sikerült megoldania egy sokáig ellenálló feladatot: a növekedésnek, az akarat erősödésének örült csillogó szeme. S szemének ez a csillogása a legrosszabb pillanatainkban is erőt adott, és a saját erőnkre emlékeztetett mindannyiunkat, akik a közelében lehettünk. Ahogyan a temetésen több tanítványa is fogalmazott: nem búcsúzunk, hanem köszönetet mondunk Kavics tanár úrnak mindazért, amit kaptunk tőle. Köszönetet mondunk azért, ami már mindörökre velünk marad, s amiért mostantól mi vagyunk a felelősek, hogy mindörökre itt maradjon közöttünk.

Részletek a Rácz tanár úr díj odaítélésére való felterjesztés indoklásából:

Kőváry Károly 1923. május 10-én született. A szegedi piarista gimnázium elvégzése után 1941-ben belépett a Piarista Rendbe, majd, miután a budapesti

Pázmány Péter Tudományegyetemen matematika-fizika szakos diplomát szerzett, 1947-ben pappá is szentelték. Az egyházi iskolák államosítása után pár évig lelkipásztori teendőket lát el Budapesten, majd 1952-től tanít: előbb egy évet a Kossuth Lajos Gimnáziumban, majd tíz évig a Bagi Ilona Gimnáziumban. 1963-ban került a Fővárosi Fazekas Mihály Gimnáziumba, ahol 28 évig tanít. Ez alatt úttörő munkát végzett a speciális matematika tagozat beindításánál. A tagozatos tanterv kialakításánál és didaktikai-pedagógiai módszereinek kidolgozásánál is mértékadó volt az, amit ő csinált saját osztályaiban. Részt vett a tagozatos tankönyvek megírásában és lektorálásában. 15 éven keresztül vezette a Fazekas Gimnázium matematikai munkaközösségét. Tanítványai sok kiemelkedő eredményt értek el a matematikai versenyeken, több mint húsz diákja nyert díjat az évek során a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián. Az OKTV-n és a többi országos évfolyamversenyen még ennél is több tanítványa szerepelt sikeresen. Egykori diákjai ma Magyarország mellett Európa és Amerika legkülönbözőbb híres egyetemein tanítanak, komoly tudományos munkássággal rendelkeznek, és többen közülük itthon akadémikusok. Matematikatanárok egész „generációját" nevelte ki: több iskolában tanítanak egykori tanítványai, akik az ő szellemében nevelik diákjaikat a matematika szeretetére és egymás megértésére. Aktívan részt vett a budapesti pedagógusok továbbképzésében, hosszú ideig szerepet vállalt a tanárképzésben is mint a Szegedi Tanárképző Főiskola levelező hallgatóinak konzultációvezetője.

1991-ben nyugdíjba vonult, s ezzel párhuzamosan rendje az újra induló váci Piarista Gimnázium igazgatásával bízta meg, itt 1991-től tanít. Sok figyelmet fordított a vidéki, hátrányos helyzetű tehetségek gondozására. Bárhol is tanít, órái a humorral és örömmel végzett munka műhelyei.

Több mint húsz évig volt a Bolyai János Matematikai Társulat vezetőségének tagja, többek között az Oktatási szakosztály titkára, majd a társulat alelnöke. Évtizedekig részt vállalt az OKTV nem-tagozatos versenybizottságában. Több cikke olvasható A matematika tanítása c. folyóiratban és a KöMaL-ban. 1968-ban a Beke Manó-díj második, 1983-ban az első fokozatát kapta. Megkapta a Munka Érdemrend ezüst fokozatát is.

2001-ben az első alkalommal kiosztásra kerülő Rátz tanár úr életműdíjat – Urbán Jánossal együtt – Kőváry Károly kapta. Szinte halála napjáig tanított.

Surányi László

AZ ELLIPTIKUS SÍK LEGRITKÁBB FEDÉSE NÉGY EGYBEVÁGÓ KÖRREL*

HEPPES ALADÁR

Fejes Tóth Gábor egy cikkében [2] nemrég hivatkozást találtam egy akkor friss eredményemre, azzal a megjegyzéssel, hogy az erről írt dolgozatom a Matematikai Lapoknál megjelenőben van. Sajnos a hivatkozás nem pontos, mert a cikk publikálása a szándéknál elakadt és azóta sem jelent meg. Most pótolom a hiányt.

A gömb adott számú kongruens körrel való legritkább fedéseinek keresése közben szerepet kaptak azok az elrendezések, amelyek centrálszimmetrikusak, és így tekinthetők az elliptikus sík feleannyi körrel való fedésének is. Jelölje σ_n a gömb, és ϱ_k az elliptikus sík esetében azt a minimális sugár értéket, amelyre a gömb n, illetve a sík k körrel lefedhető. Nyilván $\sigma_{2k} \leq \varrho_k$ minden $k \geq 1$ értékre teljesül.

A gömb optimális fedéseire ismert eredmények alapján szimmetrikus például a legjobb elrendezés $n = 2, 6$ és 12 kör esetében [1], tehát tudjuk, hogy az elliptikus sík k körrel való legritkább lefedésénél a sugár $\sigma_{2k} = \varrho_k$, ha $k = 1, 3$ illetve 6. Kiemeljük a

$$\varrho_3 = \arcsin\left(\sqrt{2/3}\right) = 0{,}955317\ldots$$

értéket, amire a későbbiekben szükségünk lesz. Különösen érdekesek lehetnek azok a k értékek, amelyekre az elliptikus sík k és a gömb $2k$ egybevágó körrel való legritkább fedése eltérő konstrukcióhoz vezet. Ismeretes [2], hogy a gömb optimális fedésénél $n = 10$ és $n = 14$ esetekben az elrendezés nem szimmetrikus, amiből a $k = 5$ és $k = 7$ értékekre a $\varrho_k > \sigma_{2k}$ egyenlőtlenség következik. A gömb nyolc körrel való legjobb fedése ugyan nem ismert, de Schütte [3] egy konstrukciója szerint $\sigma_8 < 0{,}8405$. Az $n = 4$ esetet vizsgálva meghatározzuk az elliptikus sík négy körrel való leggazdaságosabb fedését, amiből a Schütte-konstrukcióra tekintettel a $\varrho_4 > \sigma_8$ egyenlőtlenség is következik.

Bebizonyítjuk a következőt:

Tétel. *Ha az elliptikus síkot négy egybevágó ϱ-sugarú kör fedi, akkor $\varrho \geq \varrho_4 = \arcsin\left(2/\sqrt{7}\right) = 0{,}85707\ldots$. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha három kör középpontja egymástól $\pi/3$, a negyedik középpontjától pedig $\pi/2$ távolságra helyezkedik el.*

A kutatást részben az OTKA kutatási alap támogatta (T030012 és T037752).

A bizonyítást az egységgömbön centrálszimmetrikusan elhelyezkedő négy ϱ_4 sugarú körpárra vonatkozóan végezzük, kimutatva, hogy a fedés szerkezete – egybevágóságtól eltekintve – egyértelmű. Könnyen belátható, hogy két különböző ϱ_4 sugarú körpár viszonylagos helyzetét egyértelműen meghatározza tengelyeik (pólusaik) φ szöge. Vizsgálhatjuk egy ilyen körpár által egy másik körpár egy körének határából lefedett részek γ összhosszát, mint a φ szög függvényét. A $0 < \varphi \leq \pi/2$ intervallumban értelmezett, az egész intervallumban folytonos $\gamma(\varphi)$ függvényre könnyen igazolhatók az alábbi állítások:

1) a $0 < \varphi < \pi - 2\varrho_4$ intervallumban minden kör a másik párnak pontosan egyik körét metszi, és itt a $\gamma(\varphi)$ függvény szigorúan fogy,

2) a $\pi - 2\varrho_4 \leq \varphi \leq \pi/2$ intervallumban minden kör a másik párnak mindkét körével találkozik (metszi vagy érinti), és itt a $\gamma(\varphi)$ függvény szigorúan nő, (helyi) maximuma egy kör kerületének egy harmada,

3) ha egy körpár egy másiknak mindkét körével találkozik, akkor a körök mindkét fedett íve kisebb, mint egy kör kerületének egy negyede.

Tekintsünk egy ϱ_4 sugarú körpárokkal megvalósított fedést és a hozzá tartozó D–V cellarendszert. (Egy D–V cella azon pontok összessége, amelyek az egyik középponthoz közelebb esnek, mint a többihez. Esetünkben a D–V cellák konvex sokszögek.) Az egyes cellákat lefedi az a kör, amelynek középpontja a cellát generálja. A körrendszer centrális szimmetriáját a cellarendszer is örökli, tehát mind az élek, mind a csúcsok száma páros. A cellák száma nyilván nyolc, hiszen – mint említettük – hat körrel való fedés esetén nagyobb körökre van szükség. Ugyanezért minden cellának van olyan része, amit csak a saját köre fed. Egy cellának legfeljebb hat oldala lehet, hiszen egy kör és átellenes párja nem lehet szomszédos, ezért két átellenes cellának nincs közös oldala.

(1) A tétel igazolásához elég azt bizonyítani, hogy van olyan cella, amely hatszög. Ekkor ugyanis a vizsgált kör határát fedő körpárok mindegyikére a 2) alattiak érvényesek, így egy ilyen cellához tartozó kör fedése csak úgy lehetséges, ha e hatszög szabályos, tehát az elrendezés a tételben leírttal megegyezik.

(2) Egy cella sem lehet 5 oldalú. Ilyenkor ugyanis az ehhez tartozó K kör határát fedő öt kör két kétszer metsző körpár, K_1 és K_2 köreiből és – ötödikként – a harmadik körpár egyik köréből kellene álljon. K_1 két köre K határának két ívét fedi, és két, K határán szimmetrikusan elhelyezkedő, (azonos hosszúságú) ívét szabadon hagyja. Mindenképpen szabadon hagyja – 3) szerint – K határának a K és K_1-beli körök középpontjai által meghatározott síktól legmesszebb eső, egymással átellenes negyedíveit. Minthogy ugyanez elmondható K_2-ről is, az első négy kör (K_1 és K_2 körei) biztosan fedetlenül hagyják K határának két átellenes pontját, ezeket pedig az ötödik kör egyedül nem tudja lefedni.

(3) Vizsgáljuk most azt a lehetőséget, hogy csak 3 és 4 oldalú celláink vannak, (mindegyikből páros számú), és van köztük négyoldalú is. Négyoldalú cella esetén van két körpár, amelyek kölcsönösen két-két körben metszik egymást. Nevezzük e négy kör középpontján átmenő főkört egyenlítőnek. A négy kör együtteséből álló és az egyenlítőre szimmetrikus gyűrű két olyan tartományt hagy fedetlenül,

amelyek határa négy-négy egybevágó, ϱ_4 sugarú, legalább harmadkörnyi ívből áll. Az ezekhez a körökhöz tartozó cellák két-két oldala az egyenlítőre merőleges főkör (délkör) része. Ezek a cellák mind négyoldalúak, hiszen egy ilyen cella egyébként csak az egyenlítőhöz tartozó valamelyik pólusnál záródhatna, és így nem férne el egy olyan ϱ_4 sugarú körben, aminek a középpontja az egyenlítőn van. A négy négyoldalú cella alkotta gyűrű a gömbből két négyszöget hagy szabadon, ezek mindegyike két cellára esik szét, amelyek – minthogy minden cella három- vagy négyszög – szükségképpen (egyik oldalukkal egy délkörön fekvő) háromszögek. Egy-egy háromszögcellát egy-egy további kör fed, tartalmazva a délkörön fekvő háromszögoldal két végét is, amelyek pedig egy körpár két különböző köréhez tartoznak. Utóbbi tulajdonság azonban – 3) alapján – ellentmond annak, hogy a szóban forgó kör ugyanezen körpár egyik körének határából annak legalább harmadát fedi.

(4) Végül lássuk be, hogy nem lehet valamennyi cella háromszög. Ebből az Euler tétel felhasználásával először azt kapnánk, hogy a cellarendszerben hat csúcs van. A csúcsok köré írt ϱ_4 sugarú körök azonban szintén lefednék a gömböt, hiszen egy-egy ilyen kör lefedi az itt találkozó D–V cellákhoz tartozó körök középpontjait, és ezzel ezek konvex burkát, s így e hat kör lefedné a teljes gömböt. Egy csak háromszögekből álló cellarendszer léte tehát azt jelentené, hogy ϱ_4 sugarú körből a gömb fedéséhez 6 is elég, pedig, mint tudjuk, $\varrho_3 = 0{,}955317\ldots$, ami ennek ellentmond.

Irodalom

[1] L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften LXV., Springer Verlag 1953, Berlin-Göttingen Heidelberg.

[2] G. Fejes Tóth, Kreisüberdeckungen der Sphäre, *Studia Sci. Math. Hungar.* **4** (1969), 225–247.

[3] K. Schütte, Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen, *Math. Annalen* **129** (1955), 181–186.

Aladár Heppes: The thinnest covering of the elliptic plane by 4 congruent circles

Theorem: The minimal density covering of the elliptic plane with four equal circles is established by circles of radius $\varrho_4 = \arcsin\left(2/\sqrt{7}\,\right) = 0.857072\ldots$ centered at the vertices of a tetrahedron with regular base triangle of sidelength $\pi/3$ and side edges of length $\pi/2$.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL
II. RÉSZ: ILLESZKEDÉSI BECSLÉSEK

ELEKES GYÖRGY

1. A Szemerédi–Trotter-alaptétel általánosított gyümölcsösökről

Erdős az előző részben említettnél általánosabb formában is felvetette a gyümölcsösök problémáját. Kérdéséből - és az azt megválaszoló Szemerédi–Trotter-tételből - az illeszkedések elméletének új, igen hatékony ága alakult ki.

A sík tetszőleges $\mathcal{P}$ ponthalmazára és $k \geq 2$ természetes számra jelöljük a továbbiakban $f(\mathcal{P}, k)$-val azon egyenesek számát, amelyekre legalább k darab $\mathcal{P}$-beli pont illeszkedik. Legyen továbbá

$$f(n,k) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\mathcal{P}|=n} f(\mathcal{P},k)$$

a legnagyobb olyan érték, ami ügyesen elhelyezett pont-n-essel elérhető.

$k = 2$-re nyilván $f(n,2) = \binom{n}{2}$, míg a $k = 3$ speciális esetben $f(n,3) = s(n)$, vagyis az eredeti Sylvester-féle gyümölcsösök problémájához jutunk vissza. Mivel ez utóbbinak sem tudjuk a pontos értékét, az általános esetben ez még kevésbé várható.

1.1. Probléma (Erdős). *Határozzuk meg $f(n,k)$ nagyságrendjét n és k függvényében!*

Már maga Erdős is észrevette, hogy $f(n,k)$ egészen másképp viselkedik k kis értékeire, amelyek jóval $\sqrt{n}$ alatt maradnak; és megint másképp a nagyobbakra, amelyek jóval meghaladják $\sqrt{n}$-et. Nézzük először a kis k-kat!

1.2. Példa. Adott n és $k \leq \sqrt{n/2}$ mellett legyen

$$\mathcal{P} = \{1,2,\ldots,k\} \times \{1,2,\ldots,\lfloor n/k \rfloor\}.$$

Nyilván $|\mathcal{P}| \leq n$. Tekintsük a következő egyenletű egyeneseket:

$$y = mx + b, \quad \text{ahol} \quad m = 1,2,\ldots,\lfloor n/(2k^2) \rfloor \quad \text{és} \quad b = 1,2,\ldots,\lfloor n/(2k) \rfloor.$$

Ezek száma $\lfloor n/(2k^2)\rfloor \cdot \lfloor n/(2k)\rfloor \geq (1/16)n^2/k^3$, hiszen $z \geq 1$ esetén $\lfloor z\rfloor \geq z/2$. Ugyanakkor mindegyik egyenletbe az $x = 1, 2, \ldots, k$ számok bármelyikét helyettesítve az $1, 2, \ldots, \lfloor n/k\rfloor$ értékek valamelyikét kapjuk, hiszen

$$y = mx + b \leq \frac{n}{2k^2} \cdot k + \frac{n}{2k} = \frac{n}{k}.$$

Így valóban k pontot tartalmaz a $\mathcal{P}$ halmazból minden egyes egyenes, tehát

$$f(n,k) \geq \frac{1}{16} \cdot \frac{n^2}{k^3}, \quad \text{ha} \quad k \leq \sqrt{n/2}. \tag{1}$$

Az is megmutatható, hogy a $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrácsból is *minden* ilyen kis k-ra – alkalmas fix $c > 0$ konstans mellett – cn^2/k^3 egyenes tartalmaz k vagy több pontot. Ez volt Erdős eredeti példája; sejtése pedig az, hogy ez már a pontos nagyságrend: $f(n,k) \leq Cn^2/k^3$, ha k kicsi.

1.3. Megjegyzés. $f(n,k) \leq Cn^2/k^2$ (itt a nevezőben k csak a négyzeten szerepel!) nyilvánvalóan teljesül *minden* n, k-ra, hiszen az összesen $n(n-1)/2$ pontpárból minden egyenes legalább $k(k-1)/2$ különbözőt tartalmaz, így $f(n,k) \leq n(n-1)/\big(k(k-1)\big) \approx n^2/k^2$.

Először Beck [2] talált $n^2/k^{2+\delta}$ nagyságrendű felső korlátot, $\delta = 1/20$ mellett. Már ennek a viszonylag gyenge becslésnek is gyönyörű következményei vannak, lásd a 3.1, 3.6 és 3.7. tételeket. Nem sokkal később Szemerédi és Trotter [10] igazolta Erdős sejtését (lásd 1.5. tétel első része).

Mi a helyzet nagy k értékekre? Itt úgy gondolkozhatunk, hogy tetszőlegesen véve egyik egyenesünket, $\geq k$ pont lesz rajta; ezek közül legfeljebb egyet tartalmazhat a második egyenes, így $\geq (k-1)$ új pont adódik. Ezt folytatva, az i-edik egyenesre az előzőekből legfeljebb $i-1$ pont eshet (minden régebbi egyenesről egy-egy), tehát ekkor is $\geq k-(i-1)$ új pontot kapunk. Ezt egészen addig folytathatjuk, amíg a kapott pontok száma, $k + (k-1) + \ldots + (k-i+1)$ nem haladja meg n-et (vagy amíg $k < i$ nem lesz, de $k \geq \sqrt{2n}$-re, mint alább megmutatjuk, NEM ez következik be először).

Jelöljük ugyanis ekkor $M = M(n,k)$-val azt a legnagyobb természetes számot, melyre az M tagú $k + (k-1) + (k-2) + \ldots + (k-M+1)$ „leszálló" összeg nem haladja meg n-et. Mivel $k + (k-1) + \ldots + 1 = \binom{k+1}{2} > n$ (hiszen $k \geq \sqrt{2n}$), így $M < k$.

1.4. Állítás. *$f(n,k) \sim n/k$, pontosabban $n/k - 1 \leq f(n,k) = M(n,k) \leq 2n/k$, ha $k \geq \sqrt{2n}$.*

Bizonyítás. Három dolgot kell igazolnunk.

(i) $f(n,k) \leq M(n,k)$. Valóban, mint fentebb végiggondoltuk, az első egyenes legalább k pontot tartalmaz $\mathcal{P}$-ből, a második legalább $k-1$ darab *újat,* stb. Így M definíciója miatt készen vagyunk.

(ii) $f(n,k) \geq M(n,k)$, azaz ennyi darab k pontú egyenes el is érhető. Valóban, helyezzünk el ennyi általános helyzetű egyenest és tekintsük a metszéspontjaikat – továbbá mindegyiken vegyünk fel még $k - M + 1$ pontot (és, ha szükséges, az egyiken még néhány továbbit, hogy pontosan n-et kapjunk)!

(iii) $M \cdot k/2 \leq k + (k-1) + (k-2) + \ldots + (k - M + 1) \leq n$ miatt $M \leq 2n/k$; ugyanakkor $kM \geq k + (k-1) + (k-2) + \ldots + (k - M + 1) \geq n - k$ (különben M nem lenne maximális, hiszen $k + \ldots + (k - M + 1) < n - k$ esetén egy $M + 1$-edik egyenest is felvehetnénk) – így $M \geq n/k - 1$. ∎

Végül vizsgáljuk a $\sqrt{n}$ körüli maradék értékeket! Először is megmutatjuk, hogy a nagyságrend még ekkor is ugyanaz marad, mint „nagy" k-ra volt:

$$f(n,k) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{k} - 1, \quad \text{ha} \quad \sqrt{n/2} \leq k \leq \sqrt{2n}.$$

Valóban, a $k' = 2k \geq \sqrt{2n}$ jelöléssel az 1.4. állítás szerint $f(n,k') \geq n/k' - 1$. Márpedig a $k' = 2k$ pontú egyeneseken természetesen több, mint k pont van, így ezek mind jók. Innen

$$f(n,k) \geq f(n,2k) = f(n,k') \geq \frac{n}{k'} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{k} - 1.$$

Hasonló nagyságrendű felső korlát is mutatható, bár az nem ilyen egyszerű.

A három esetet kettőbe sűríti a következő becslés, melyet Szemerédi és Trotter igazolt.

1.5. Tétel (Szemerédi–Trotter). *Minden rögzített $c > 0$-ra és $k \geq 2$-re*

$$f(n,k) \leq \begin{cases} C_1 \dfrac{n^2}{k^3} & \text{ha } k \leq c\sqrt{n}; \\ C_2 \dfrac{n}{k} & \text{ha } k > c\sqrt{n}, \end{cases}$$

ahol a C_1, C_2 együtthatók természetesen függnek c-től, de n-től és k-tól nem.

A becslés nagyságrendje pontos, mint azt az 1.2. példában és az 1.4. állításban láttuk.

A tételre a közelmúltban Székely László talált új, egyszerű és elegáns bizonyítást [11]. Ezt a következő szakaszban ismertetjük.

A Szemerédi–Trotter-tétel sok más alakban is kimondható.

1.6. Tétel (Szemerédi–Trotter-tétel, maximum alak). *Létezik $C > 0$ abszolút konstans, melyre*

$$f(n,k) \leq C \cdot \max\left\{\frac{n^2}{k^3}, \frac{n}{k}\right\}.$$

A következő szakaszban $C = 256$-ról mutatjuk meg, hogy megfelel.

A tétel két alakja nyilván ekvivalens, hasonlóan egy lehetséges harmadikhoz, melyben a két törtnek nem a maximuma, hanem az összege szerepelne. Megint újabb változatot kapunk, ha egyenesek és pontok közötti *illeszkedések* számára keresünk felső becslést.

1.7. Tétel (Szemerédi–Trotter-tétel, illeszkedés alak). *Létezik $C > 0$ abszolút konstans, hogy a sík n pontja és m egyenese között fellépő illeszkedések I száma legfeljebb*

$$I \leq C \cdot \max\left\{n^{2/3}m^{2/3}, n, m\right\}.$$

Ebből a formából könnyen következik az eredeti változat is (a fordított irányú implikációt itt nem részletezzük). Ha ugyanis m egyenes mindegyikén legalább k pont van, akkor $mk \leq I \leq C \cdot \max\left\{n^{2/3}m^{2/3}, n, m\right\}$ miatt vagy $mk \leq Cn^{2/3}m^{2/3}$, azaz $m \leq C^3n^2/k^3$; vagy $mk \leq Cn$, azaz $m \leq Cn/k$.

Vegyük észre azt is, hogy az 1.7. tétel önduális: az egyenesek és pontok szerepe felcserélhető. Következésképpen a korábbi 1.5 és 1.6. tételek duálisa is igaz lesz; a szerepek ott is felcserélhetőek (lásd még az I. rész 1.7. definícióját). Így *adott egyeneshalmazhoz* kapunk becslést a legalább k-szoros *metszéspontok* számára.

1.8. Megjegyzés. A Szemerédi–Trotter-tétel fenti három alakja általánosítható a *komplex* sík (tehát nem a $\mathbb{C}$ komplex számsík, hanem a komplex számpárokból álló $\mathbb{C}^2$) pontjaira és egyeneseire is. A Székely-módszer ugyan nem működik ebben az esetben, de az eredeti Szemerédi–Trotter-féle bizonyítás alkalmas módosításával Tóth Csabának ezt is sikerült igazolnia [12].

2. A Szemerédi–Trotter-alaptétel Székely-féle bizonyítása

A Székely-módszer lényege, hogy az illeszkedési problémát gráfok úgynevezett „metszési számára" fogalmazza át. Először ez utóbbit definiáljuk.

Egy gráfot síkbarajzolhatónak nevezünk, ha csúcsainak megfeleltethetjük a sík különböző pontjait, éleinek pedig a megfelelő pontokat összekötő, egymást (és önmagukat) nem metsző folytonos görbéket. Ismeretes egyrészt az Euler-tétel, mely szerint egy összefüggő gráfot a fenti módon síkba rajzolva $n + l = e + 2$ lesz, ahol n, l és e rendre a csúcsok, lapok és élek száma (a külső, végtelen tartományt is lapnak tekintjük). Ebből az is könnyen igazolható, hogy – többszörös él nélküli – síkbarajzolható $n \geq 3$ csúcsú gráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle lehet (és egyenlőség csak akkor állhat, ha a lerajzolásban minden lap, még a külső, végtelen lap is háromszög). Más szóval, ha egy $n \geq 3$ csúcsú gráfnak legalább $3n - 5$ éle van, akkor bárhogy lerajzolva, mindenképpen keletkezik két metsző élpár.

Mit mondhatunk a metszések számáról, ha még ennél is több élt követelünk meg? Egy maximális síkbarajzolható részből indulva, minden további él újabb és újabb metszéspontot ad. Így pl. igaz a következő.

2.1. Állítás. *n csúcsú, e élű gráf bármely lerajzolásában $\geq e - 3n$ darab metsző élpár keletkezik.*

($\geq e - 3n + 6$ is lesz, de továbbra is csak a nagyságrendekre ügyelünk.)

Még tovább növelve az élszámot, az új élek ($e = 6n$ körül) már *egymással is* biztosan adnak metszéspontot. Teljes általánosságban a következő – eredetileg nyomtatott áramkörök tervezésével kapcsolatban felmerült – becslés adható [1, 6].

2.2. Tétel (Ajtai–Chvátal–Newborn–Szemerédi ill. Leighton). *Ha $e \geq 4n$, akkor egy n csúcsú, e élű, többszörös él nélküli gráfot bárhogyan lerajzolva, legalább*

$$\frac{1}{64} \cdot \frac{e^3}{n^2}$$

metsző élpár keletkezik.

Bizonyítás (vázlat). Képzeljük el, hogy lerajzoltuk valahogy a gráfot. Jelöljük a metsző élpárok számát X-szel!

Válasszuk ki a pontok egy részét véletlenszerűen úgy, hogy minden pontot $p = 4n/e \leq 1$ valószínűséggel, egymástól függetlenül választunk. A csúcsok, élek, illetve az eredeti lerajzolásból megmaradó metszések számának $\overline{n}$, $\overline{e}$ és $\overline{X}$ várható értéke rendre

$$\overline{n} = pn;$$

$$\overline{e} = p^2 e = p \cdot p \cdot e = p \cdot \frac{4n}{e} \cdot e = 4np = 4\overline{n};$$

$$\overline{X} = p^4 X,$$

hiszen egy él megmaradásához *két*, egy metsző élpár megmaradásához *négy* csúcsot kell bevennünk.

Mivel a 2.1. állítás szerint $\overline{X} \geq \overline{e} - 3\overline{n}$, a

$$p^4 X = \overline{X} \geq \overline{e} - 3\overline{n} = 4pn - 3pn = pn$$

egyenlőtlenségre jutottunk, ahonnan

$$X \geq \frac{n}{p^3} = \frac{1}{64} \cdot \frac{e^3}{n^2}. \qquad \blacksquare$$

Vegyük észre a fenti gondolat egy különlegességét (mely a valószínűségszámítási módszert használó sok más bizonyítással közös): bár véletlen választások során tapasztalható várható értékeket vizsgálunk, az állítás nem csak annyi, hogy valami nagy valószínűséggel bejövetkezik, hanem BIZTOSAT mondhatunk: a metsző élpárok száma MINDIG nagy. Ez azon múlik, hogy adott gráf esetén a várható értékek konkrét számok; a közöttük fennálló egyenlőtlenségek már nem függnek a véletlentől.

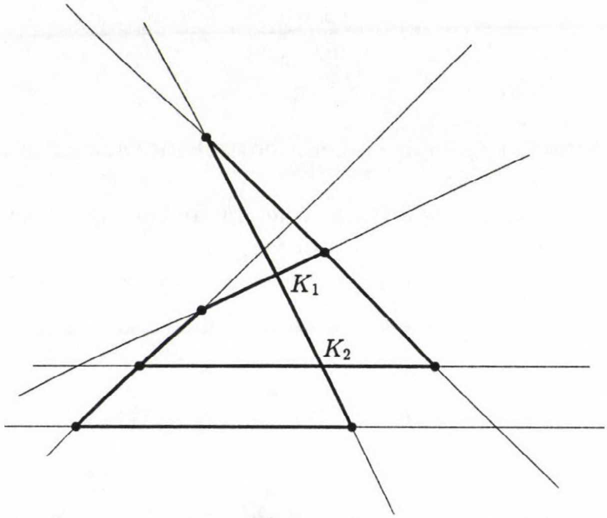
A fenti becslést Székely a következőképpen alkalmazta a Szemerédi–Trotter-tétel bizonyítására (az 1.6. változatot fogjuk igazolni):

Legyen $2 \leq k \leq n$ (egészek), és tekintsünk egy olyan pont-n-est, amelyből a lehető legtöbb egyenes tartalmaz k vagy több darabot – vagyis az ilyen egyenesek száma, jelölésünk szerint, éppen $f = f(n, k)$.

2.3. Definíció. Rendeljük hozzá pontjainkhoz és egyeneseinkhez a következő gráfot:

csúcsok: az n pont;

élek: az f darab egyenesen fekvő olyan szakaszok, melyek két, egy egyenesen *szomszédos* pontpárt kötnek össze (lásd *1. ábra*).



1. ábra. Kijelölt pontok és a szomszédosakat összekötő élek. A K_1, K_2 pontok nem kijelöltek, ezért az ott találkozó élpárok metszőek.

Mivel mind az f egyenesen legalább k pont található, szükségképpen legalább $k-1$ él is lesz rajtuk. Így a gráf élszáma

$$e \geq f \cdot (k-1) \geq \frac{f \cdot k}{2}, \tag{2}$$

ahol $k-1$-ről a további számolás megkönnyítése céljából tértünk át $k/2 \leq k-1$-re.

Különböztessünk meg két esetet!

1. eset: $e < 4n$. Ekkor $f \cdot k/2 < 4n$-ből $f < 8n/k$.

2. eset: $e \geq 4n$. Ekkor a 2.2. tétel szerint a fenti ábrán szereplő lerajzolásban legalább $(1/64)e^3/n^2$ metsző élpár szerepel. Ugyanakkor bármely két egyenes csak egy pontban metszheti egymást, így a metsző párok száma $\leq \binom{f}{2} < f^2/2$. A két értéket összevetve és felhasználva (2)-t,

$$\frac{f^2}{2} \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{e^3}{n^2} \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{(f \cdot k/2)^3}{n^2},$$

ahonnan $256n^2/k^3 \geq f$. Arra jutottunk tehát, hogy

$$f(n,k) \leq 256 \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n^2}{k^3}\right\},$$

hiszen a jobb oldal mindkét esetben felső becslést adott. ■

3. Beck „két véglet" tétele

Ha egy n elemű síkbeli ponthalmaz bármely két pontján keresztül egyenest húzunk, tipikusan n^2 nagyságrendű számú különböző ilyen egyenes adódik. Előfordulhat persze ennél lényegesen kevesebb is, például – másik végletként – csak egyetlen egyenest kapunk, ha mind az n pont kollineáris.

Beck [2] vette észre, hogy a két szélsőség közül – konstans szorzó erejéig – legalább az egyik mindig bekövetkezik.

3.1. Tétel (Beck). *n síkbeli pont által meghatározott egyenesekre a következő két extrém eset valamelyike – esetleg mindkettő – biztosan bekövetkezik:*

(i) *vagy legalább $n/10000$ darab pont ugyanarra az egyenesre esik;*

(ii) *vagy a pontok legalább $(n/10000)^2$ különböző egyenest határoznak meg.*

Persze ez csak nagy n értékekre érdekes (akkor viszont nagyságrendileg optimális); kis n-ekre az állítás semmitmondó.

3.2. Megjegyzés. Beck eredetileg (gondosabb számolással) 10000 helyett 100-as konstanssal igazolta tételét – de valószínűleg még ez is javítható. A számolás egyszerűsítése céljából mi csak a fenti gyengébb korlátot adjuk.

A precíz bizonyítás két lemmán múlik. Legyen $\mathcal{P}$ tetszőleges n elemű síkbeli ponthalmaz, $L_1, L_2, \dots, L_i, \dots$ pedig a pontok által meghatározott egyenesek. Az L_i egyenesre eső pontok számát jelölje k_i.

3.3. Lemma. *Ha $2 \le u \le \sqrt{n}$ tetszőleges természetes szám, akkor a legalább u, de legfeljebb $\sqrt{n}$ pontú L_i egyeneseken összesen elhelyezkedő pontpárok száma $\le 1024n^2/u$.*

Bizonyítás. Vágjuk szét a k_i értékeket 2 hatványainál; azaz $j = \lfloor \log u \rfloor, \dots, \lfloor \log\left(\sqrt{n}\right) \rfloor$-re tekintsük a $2^j \le k_i < 2^{j+1}$ feltételt teljesítő L_i egyeneseket! Rögzített j mellett az ilyen egyenesek száma az 1.6. tétel szerint $\le 256n^2/(2^j)^3$; egy-egy egyenes pedig legfeljebb

$$\binom{2^{j+1}}{2} \le \frac{\left(2^{j+1}\right)^2}{2} = 2 \cdot (2^j)^2$$

pontpárt tartalmaz. Ez eddig összesen legfeljebb

$$256 \cdot \frac{n^2}{(2^j)^3} \cdot 2 \cdot (2^j)^2 = 512 \cdot \frac{n^2}{2^j}$$

pár. Összegezve $j \ge \lfloor \log u \rfloor$-ra, még az így adódó *végtelen* mértani sor összege is legfeljebb $1024n^2/u$ lesz. ■

Hasonló 2 hatványos szétvágással igazolható a következő segédtétel is.

3.4. Lemma. *Ha $\sqrt{n} \leq v \leq n$ tetszőleges természetes szám, akkor a legalább $\sqrt{n}$, de legfeljebb v pontú L_i egyeneseken összesen elhelyezkedő pontpárok száma $\leq 1024nv$.* ■

A 3.1. tétel bizonyítása. Ha a 3.3. és 3.4. lemmában u-t és v-t megfelelően választjuk (pl. $u = 3 \cdot 1024$, $v = n/(9 \cdot 1024)$ jó lesz), akkor az $\binom{n}{2} \approx n^2/2$ pontpárból legfeljebb $\approx n^2/3 + n^2/9$ helyezkedik el olyan egyeneseken, melyek pontszámára $u \leq k_i \leq v$ teljesül.

Marad $\approx n^2/2 - 4n^2/9 = n^2/18$ pontpár a nagyon kevés és a nagyon sok pontú egyeneseken összesen. Ha ezekből akár csak *egyetlen* pár olyan egyenesre esik, melynek pontszáma legalább $v > n/10000$, akkor *létezik* ilyen egyenes; tehát készen vagyunk, a tétel (i) része bekövetkezett.

Ellenkező esetben pedig ez a $\approx n^2/18$ pontpár $< u$ pontú egyenesekre esik; ilyen egyenes tehát legalább

$$\frac{n^2}{18 \cdot \binom{u}{2}} \geq \left(\frac{n}{10000}\right)^2$$

darab lesz; ez a (ii) eset. ■

3.5. Megjegyzés. Beck tételének többdimenziós megfelelői is igazak; pl. a 3 dimenziós tér n pontjára:

(i) vagy legalább cn darab pont egy síkba esik;

(ii) vagy a pont*hármas*ok legalább $(cn)^3$ különböző síkot határoznak meg.

Ugyancsak Beck igazolta 3.1. tételének két gyönyörű következményét is:

3.6. Tétel (Dirac–Motzkin-probléma, Beck-tétel). *Ha n síkbeli pont nem mind kollineáris, akkor legalább egyikükből $\geq cn$ különböző egyenest lehet húzni a többihez.*

Dirac és Motzkin (egymástól függetlenül) azt is sejtették, hogy az állítás igaz lesz $c = 1/2$-re is, ha $n > n_0$ – ez azonban máig megoldatlan.

A tételt $c = 1/10^8$-ra igazoljuk.

Bizonyítás. Ha van $n/10000$ pont egy egyenesen, akkor egy velük nem kollineáris pont megfelel; utóbbiból csupa különböző egyenes vezet az előbbiekhez.

Ellenkező esetben pedig a 3.1. „két véglet" tétel szerint az n pont összesen $\geq n^2/10^8$ különböző egyenest határoz meg; ehhez mindenképpen szükséges, hogy valamelyikre $\geq n/10^8$ egyenes illeszkedjék. ■

A Dirac–Motzkin-probléma feltétele az volt, hogy a pontok nem mind kollineárisak. Más szóval: bárhogy húzunk egy egyenest, arról legalább egy pont hiányzik.

Erdős kérdezte, mi mondható, ha azt az erősebb feltételt tesszük, hogy bármely egyenesről legalább x pont marad ki ($x \geq 1$).

3.7. Tétel (Erdős-sejtés, Beck-tétel). *Ha bármely egyenesre legfeljebb $n - x$ pont esik, akkor a pontok legalább $c \cdot n \cdot x$ különböző egyenest határoznak meg.*

Ennek bizonyítását (lásd [2]) nem részletezzük.

4. Pszeudoegyenes-rendszerek és r-paraméteres görbeseregek

Síkbeli folytonos, önmagukat nem metsző görbék egy halmazát *pszeudoegyenes-rendszernek* nevezzük, ha bármely kettőnek legfeljebb egy közös pontja van. (Ilyet alkotnak például az $y = x^2 + ux + v$ egyenletű parabolák, vagy általánosabban egy tetszőleges szigorúan konvex függvény grafikonjának eltoltjai.)

Kombinatorikus szempontból az ilyenek sokban hasonlítanak a közönséges egyeneshalmazokra. Például az 1.5. tétel bizonyításában az egyenesekről mindössze annyit használtunk, hogy f darab egyenesnek nem lehet $\binom{f}{2}$-nél több metszéspontja. Mivel ez pszeudoegyenesekre is fennáll, így a Szemerédi–Trotter-tétel igaz marad ilyen rendszerekre is.

További nevezetes görbehalmazok a két- és többparaméteres görbeseregek. Szemléletesen egy görbesereg r-paraméteres, ha bármely r pont „lényegében egyértelműen" meghatározza a rajtuk átmenő görbét. Pontosan ez a következőt jelenti.

4.1. Definíció. A sík folytonos, önmagukat át nem metsző görbéinek egy családját *r-paraméteres görbesereg*-nek nevezzük, ha vannak olyan s_1, s_2 természetes számok, hogy

(i) a sík bármely r darab pontjára legfeljebb s_1 darab görbe illeszkedik;

(ii) bármely két görbének legfeljebb s_2 metszéspontja van.

Ebben az értelemben az egyenesek, a pszeudoegyenes-rendszerek valamint az egységkörök (utóbbiak $s_1 = s_2 = 2$ korláttal) két-, a körök vagy az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabolák (ismét $s_2 = 2$) három-, a kúpszeletek pedig ($s_2 = 4$) ötparaméteres sereget alkotnak.

4.2. Megjegyzés. Pontosabb lenne az „s_1, s_2 korlátokkal rendelkező r-paraméteres görbesereg" kifejezés, de ha az s_i-k értékét nem is mindig hangsúlyozzuk, létezésüket mindig ide értjük.

Kétparaméteres seregekre is igaz marad a Szemerédi–Trotter-tétel, hiszen a bizonyítás lényegét képező, a 2.3. definícióban mutatott gráf minden éle csak s_1-szeres lehet (ami n-től független konstans); f darab görbének pedig legfeljebb $s_2 \cdot \binom{f}{2}$ metszéspontja lesz (de a szorzó itt is n-től független konstans).

A bizonyításban szereplő (2) egyenlőtlenség továbbra is érvényben marad; az esetszétválasztás pedig aszerint történhet, hogy e kisebb-e vagy nagyobb, mint $4s_1n$. Utóbbi esetben a többszörös élekből csak egyet-egyet tartva meg, a

$$s_2 \cdot \frac{f^2}{2} \geq \frac{1}{64}\frac{(e/s_1)^3}{n^2} \geq \frac{1}{64}\frac{(f \cdot k)^3/(2s_1)^3}{n^2}$$

egyenlőtlenségre jutunk, ahonnan $256s_1^3s_2n^2/k^3 \geq f$. Igaz tehát a következő:

4.3. Tétel (Általánosított Szemerédi–Trotter-tétel). *Az 1.5, 1.6 és 1.7. tételek becslései igazak maradnak pszeudoegyenes-rendszerekre és kétparaméteres görbeseregekre is – utóbbiakban a korlátokban szereplő együtthatók függeni fognak s_1 és s_2 értékétől, de n-től és k-tól nem.* ■

A becslés egységkörökre vonatkozó speciális esete Spencer–Szemerédi–Trotter-től [9]; a kétparaméteres seregekről szóló pedig Clarkson–Edelsbrunner–Guibas–Sharir–Welzl-től származik [3]. Az egységkörök – mint kétparaméteres sereg – szép alkalmazását láthatjuk majd a következő részben.

Mi a helyzet, ha $r \geq 3$? Az ilyen görbecsaládokra Pach és Sharir talált a Szemerédi–Trotter-korláthoz hasonlót [7, 8].

4.4. Tétel (Pach–Sharir). *Egy r-paraméteres, s_1, s_2 korlátokkal rendelkező görbesereg azon görbéinek száma, melyek a sík n pontja közül legalább k-t tartalmaznak,*

$$\leq \begin{cases} C \cdot \dfrac{n^r}{k^{2r-1}} & \text{ha } k \leq c\sqrt{n}; \\ C \cdot \dfrac{n}{k} & \text{ha } k > c\sqrt{n}, \end{cases}$$

ahol a $C = C(r, s_1, s_2)$ konstans csak r-től és s_1, s_2-től függ, n-től és k-tól nem. ■

4.5. Megjegyzés. Bár az egyenesekre vonatkozó Szemerédi–Trotter-tételek a komplex síkra is kiterjeszthetőek (lásd 1.8. megjegyzés), a fenti eredménnyel kapcsolatban ugyanez a kérdés még megoldatlan.

A Szemerédi–Trotter-tétellel ellentétben a Pach–Sharir-tétel valószínűleg *nem is a pontos nagyságrendet adja,* ha $r \geq 3$. Például $r = 3$-ra és $k \leq c\sqrt{n}$-re korlátjuk n^3/k^5 nagyságrendű, de ezt elérő alsó becslés nem ismeretes. Sőt, az eddig talált legjobb konstrukciók mást adnak $\sqrt[3]{n} \leq k \leq \sqrt{n}$-re és megint mást $k \leq \sqrt[3]{n}$-re! Előbbiekre nem tudunk jobb struktúrát, mint ami az 1.2. példa egyeneseiből, mint kétparaméteres seregből adódik – vagyis az ilyen, „nem elég kis" k értékekre nem tudjuk kihasználni a három paramétert. Ez eddig csak $k \leq \sqrt[3]{n}$-re sikerült; de akkor is csak $\approx n^3/k^6$ görbe adódik – a tétel n^3/k^5 nagyságrendű korlátja helyett.

4.6. Példa. Legyen $k \leq \sqrt[3]{n/3}$ és tekintsük a $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, k\} \times \{1, 2, \ldots, \lfloor n/k \rfloor\}$ ponthalmazt. 3 paraméteres görbeseregünk álljon azokból az

$$y = ax^2 + bx + c$$

egyenletű parabolákból, melyekre

$$a = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{3k^3} \right\rfloor, \qquad b = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{3k^2} \right\rfloor, \qquad c = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{3k} \right\rfloor.$$

Ezen görbék száma

$$\left\lfloor \frac{n}{3k^3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{3k^2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{3k} \right\rfloor \geq \frac{1}{6^3} \cdot \frac{n^3}{k^6}.$$

(Itt az egyes egész-részekre ismét a $\lfloor z \rfloor \geq z/2$ becslést használtuk, ami $z \geq 1$ esetén mindig teljesül.) Ugyanakkor minden görbe $\mathcal{P}$-nek k pontját tartalmazza, mert bármely $x \in \{1, 2, \ldots, k\}$-ra

$$y \leq \left\lfloor \frac{n}{3k^3} \right\rfloor k^2 + \left\lfloor \frac{n}{3k^2} \right\rfloor k + \left\lfloor \frac{n}{3k} \right\rfloor \leq 3\frac{n}{3k} = \frac{n}{k}. \qquad \blacksquare$$

Általános r-re a legjobb ismert konstrukció $\sim n^r/k^{r(r+1)/2}$-et ad, ha $k \leq c_r \sqrt[r]{n}$; pontosabban ilyen kis k értékekre előfordulhat, hogy nagyságrendileg ennyi görbe tartalmaz egyenként k pontot alkalmas ponthalmazból [4].

4.7. Probléma. *Igaz-e, hogy az előző példa a lehető legjobb nagyságrendet adja?*

4.8. Megjegyzés. A Pach–Sharir-tételnek is az a lényege, hogy $k \leq c\sqrt{n}$-re az r-esek kétféle összeszámolásából adódó $\approx n^r/k^r$ korlátnál jobb kitevőt ad a nevezőben (lásd az 1.3. megjegyzést). Ezért a Beck-féle „két véglet" tétel r-paraméteres görbeseregekre is általánosítható. (Az r-eseket a lemmák bizonyításában összeszámolva mindig konvergens mértani sorozat adódik, lásd [5].)

4.9. Tétel (r-paraméteres „két véglet" tétel)**.** *Legyen Γ rögzített r-paraméteres görbesereg (s_1, s_2 korlátokkal); $P_1, \ldots, P_n$ pedig olyan pontok, melyek közül bármely r-et tartalmaz alkalmas Γ-beli görbe (persze definíció szerint legfeljebb s_1 darab). Ekkor*

(i) *vagy legalább cn darab P_i egy Γ-beli görbére esik;*

(ii) *vagy a pont-r-esek legalább $(cn)^r$ különböző Γ-beli görbét határoznak meg,*

ahol $c = c(r, s_1, s_2)$ nem függ n-től. $\blacksquare$

Alkalmazásként megemlítjük Balog Antal egy (nyomtatásban meg nem jelent) kérdését.

4.10. Probléma. *A sík n, nem egyetlen körre eső és nem is kollineáris pontja legalább hány különböző sugarú kört határoz meg?*

Pontosan ez úgy értendő, hogy az $\binom{n}{3}$ ponthármasból egy-egy kört illesztünk az összes olyanra, amelyik nem esik egy egyenesbe, és összeszámoljuk, hogy az így keletkező körök sugarai között hány különböző van. Feladatunk n pontot úgy elhelyezni, hogy ez a szám minimális legyen.

Nem nehéz olyan ponthalmazt mutatni, ahol csak $\approx n/2$ különböző sugár fordul elő.

4.11. Példa. Vegyünk egy szabályos $n-1$-szöget és a köré írt kör középpontját! Minden olyan hármas, amelyik a sokszög három csúcsából áll, ugyanazt az egyetlen sugarat adja. Ha pedig olyan OAB hármast tekintünk, ahol O a középpont, akkor a rájuk illeszkedő kör sugara csak az $\overline{AB}$ távolságtól függ; ilyen pedig – a páros oldalszámú sokszög nagyátlójától eltekintve – $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ van. A különböző sugarak száma tehát $\lfloor n/2 \rfloor$.

Lehetséges-e még ennél is kevesebb? Ezt nem tudjuk, de az biztos, hogy a *nagyságrend* nem lehet kisebb [5].

4.12. Tétel. *Ha n pont nem egy körön és nem egy egyenesen fekszik, akkor $\geq cn$ különböző sugarú kört határoznak meg, alkalmas $c > 0$ abszolút konstanssal.*

Bizonyítás. Tekintsük a sík összes körének és összes egyenesének családját! Ezek *együttesen is* 3 paraméteres sereget alkotnak, éspedig $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ korlátokkal. Valóban, bármely háromra legfeljebb egy görbe illeszkedik (jelen esetben *pontosan egy:* vagy egy kör, vagy egy egyenes); két görbe pedig legfeljebb két pontban metszheti egymást. Ugyanakkor persze az is igaz, hogy tetszőleges ponthármasra valóban illeszkedik alkalmas kör vagy egyenes; így a 4.9. tétel feltételei teljesülnek.

Két esetet kapunk.

1. eset: cn pont egy körre vagy egyenesre esik és egy további, pl. P_1, nincs ezen a görbén. Rögzítsünk egy pontot a görbéről is, pl. P_2-t, és tekintsük $3 \leq i \leq cn$-re a $P_1P_2P_i$ hármasokat, ahol P_i a görbén elhelyezkedő további pontokat futja végig. Az általuk meghatározott körök sugaraiból legfeljebb kettő-kettő lehet egyenlő, hiszen a rögzített P_1, P_2 pontokon át adott sugárral csak két kör húzható, és mindkettő legfeljebb egy-egy további (P_2-től különböző) pontban metszi a görbét – akár egyenes, akár kör is az. Hasonlóan, legfeljebb egy $P_1P_2P_i$ hármas lehet kollineáris, hiszen egy egyenes bármely görbénket legfeljebb egy további pontban metszi. Így legalább

$$\frac{cn-1}{2} \approx c'n$$

különböző sugarú kört kapunk.

2. eset: a ponthármasok legalább $(cn)^3$ különböző görbét határoznak meg. Ezek közül legfeljebb $\binom{n}{2}$ lehet egyenes (minden egyenest egy pontpár határoz meg), tehát a görbék nagy része, legalább $(cn)^3 - \binom{n}{2}$ valódi kör lesz. Ezek között pedig egy adott sugár nem fordulhat elő $2\binom{n}{2}$-nél többször (mint már használtuk, bármely pontpáron legfeljebb két azonos sugarú kör mehet át), így a különböző sugarak száma legalább

$$\frac{(cn)^3 - \binom{n}{2}}{2\binom{n}{2}} \approx c^3 n - \frac{1}{2};$$

tehát a nagyságrend n-ben valóban lineáris. ∎

Irodalomjegyzék

[1] Miklós Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn, and Endre Szemerédi, *Crossing-free subgraphs*, pages 9–12. North-Holland (Amsterdam, 1982).

[2] József Beck, On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős, *Combinatorica,* **3 (3–4)** (1983), 281–297.

[3] Kenneth Clarkson, Herbert Edelsbrunner, Leo Guibas, Micha Sharir, and Emo Welzl, Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and surfaces, *Discrete and Computational Geometry,* **5** (1990), 99–106.

[4] György Elekes, Sums versus products in number theory, algebra and Erdős geometry, *Combinatorica* (2001).

[5] György Elekes, On the number of distinct radii and other parameters of curves, *Periodica Math. Hung.*, előkészületben (2003).

[6] Frank Thomson Leighton, New lower bound techniques for VLSI, *Math. Systems Theory,* **1** (1984), 47–70.

[7] János Pach and Micha Sharir, Repeated angles in the plane and related problems, *Journal of Combinatorial Theory, series A,* **59** (1990), 12–22.

[8] János Pach and Micha Sharir, *On the number of incidences between points and curves,* Technical report, Courant Institute of Math Sciences (New York, New York, NY 10012, 1996).

[9] Joel Spencer, Endre Szemerédi and W. T. Trotter Jr., Unit distances in the euclidean plane, in: *Graph theory and combinatorics* (Cambridge, 1983), pages 293–303. Academic Press, London, 1984., 1983.

[10] Endre Szemerédi and W. T. Trotter Jr., Extremal problems in Discrete Geometry, *Combinatorica,* **3 (3–4)** (1983), 381–392.

[11] László A. Székely, Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry, *Combinatorics, Probability and Computing,* **6**, No. 3 (1997), 353–358.

[12] Csaba Tóth, The Szemerédi–Trotter theorem in the complex plane. *Combinatorica* (submitted) (2003).

György Elekes: On some Combinatorial Problems
Part II: Bounds on Incidences

The "generalized Orchard Problem", formulated by Erdős, asks for determining the maximum possible number of straight lines which contain k or more points of a well-chosen plane set of n points. His conjecture on the exact order of magnitude was proven by Szemerédi and Trotter. In the present paper numerous applications and generalizations of their result is shown. Among others, pseudolines, r-parametric families of curves and the number of unit distances is mentioned.

A KONTINUUM-PROBLÉMA

JOHN STILLWELL*

1. Bevezetés

1900-ban Hilbert az első helyre rangsorolta Cantor kontinuum-problémáját azon a nevezetes listáján, melyen a 20. századnak szóló matematikai problémákat foglalta össze. 2000-ben ezt a problémát nem tartják már ilyen fontosnak, például a „Clay Millenium Prize Problems"-ek közt sem szerepel. Sőt, néhány matematikus úgy gondolja, hogy a kontinuum-problémát mára lezárták; ennek talán Paul Cohen alábbi, 1985-ből származó nyilatkozata az oka:

Személy szerint úgy látom, hogy a probléma jelenlegi megoldása teljesen kielégítő. Azt hiszem, ez az egyetlen lehetséges megoldás. E megoldás alapján pontos intuíciónk van arról, hogy mi az, ami lehetséges és mi az, ami lehetetlen, és ebben az értelemben úgy érzem, hogy mindenkinek elégedettnek kell lennie a jelenlegi helyzettel. Vannak további problémák, de azok nagy mértékben technikai jellegűek. Ha fogadásokat kötnék, arra fogadnék, hogy senki se fog előállni más jellegű megoldással.

(Interjú Don Albertsszel és Constance Reiddel, 1985 júliusában.)

Ugyanakkor, Cohen 1960-as évekbeli nagyszerű eredménye óta a halmazelméletben hatalmas fejlődés ment végbe. Hugh Woodin [7]-ben egy frissen megjelent és naprakész összefoglalóban magyarázza el, hogy a kontinuum-problémát miért kell továbbra is tanulmányozni, s hogy a Cantor által sejtett válasz esetleg miért lehet téves. Woodin munkássága technikailag roppant bonyolult, de a kontinuum tanulmányozásának klasszikus témáiból nőtt ki. Ez a cikk szerény kísérlet arra, hogy áttekintsük ezeket a témákat és mai hatásukat a halmazelmélet kutatóira.

2. Diszkrét és folytonos

A matematikusok már az ókorban felismerték, hogy nehéz összeegyeztetni a folytonost a diszkréttel. Értjük, hogyan kell folytatni az $1, 2, 3, \ldots$ számlálást tetszőlegesen nagy számokig, de vajon szintén megértjük-e, hogyan mozoghatunk 0-ból

*Az eredeti cikk 2002 márciusában jelent meg (*American Mathematical Mothly*, **109**, pp. 286–297). Fordította: Sági Gábor.

1-be a köztük fekvő kontinuum sok ponton keresztül? Nagyjából időszámításunk előtt 450-ben Zénon úgy gondolta, hogy nem, mert a folytonos mozgás lényeges módon kapcsolódik a végtelen fogalmához. Ő ezt a *dichotómia paradoxonaként* így fogalmazta meg:

> *Mozgás nem létezik, mert ami mozog, mielőtt célba érne, meg kell tennie útja első felét.*
>
> *(Arisztotelész, Fizika, 6. könyv, 9. fejezet)*

Zénon gondolatait csak Arisztotelész közvetítésével ismerjük – aki megpróbálta megcáfolni őket – de feltehetően itt Zénon számára az a problematikus, hogy célbaérkezés előtt meg kell tenni az út első felét, ehhez meg kell tenni az út első negyedét, és így tovább, ezért a *folytonos mozgáshoz be kell fejezni végtelen sok lépést.*

Az ókoriak számára a befejezett végtelen tabu volt, csakúgy, mint a legtöbb matematikus számára is egészen a 19. század végéig. Egy végtelen folyamat nem olyan-e eleve, hogy örökké tart és ezért mindig *befejezetlen* marad? Ha ezzel egyetértünk, akkor a kontinuum ködös misztikum marad, amiről lényegében semmit sem állíthatunk. Talán a kontinuum egyes pontjait megismerhetjük, s időszámításunk előtt 350-ben Eudoxus lényegében rátalált arra a modern szemléletre, mely szerint minden pontot egyértelműen meghatároz a racionális pontokhoz viszonyított helyzete. Ha azonban elutasítjuk a befejezett végtelen folyamatokat, akkor a folytonosság titka rejtve marad.

1858-ban Dedekind rendkívül elégedetlen volt ezzel a helyzettel, és elhatározta, hogy „megadja a folytonosság lényegének valódi definícióját". Saját állítása szerint ez 1858. november 24-én sikerült neki, s ezzel Eudoxus után az első valódi előrelépést tette meg a kontinuum megértésében.

A modern matematikusok számára a valós számok $\mathbb{R}$ kontinuumának Dedekind-féle konstrukciója rendkívül egyszerű: vegyük a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát és *definíció szerint* azonosítsuk az irracionális számokat a $\mathbb{Q}$-beli *hézagokkal* (vagy „szeletekkel", ahogy ezt gyakran kifejezik). Tehát, egy irracionális szám $\mathbb{Q}$ egy felbontása a $\mathbb{Q}_K$ és $\mathbb{Q}_N$ halmazokra úgy, hogy

- $\mathbb{Q}_K$ bármely eleme kisebb $\mathbb{Q}_N$ bármely eleménél és
- $\mathbb{Q}_K$-nak nincs legnagyobb eleme, $\mathbb{Q}_N$-nek pedig nincs legkisebb eleme.

Tehát, mint Eudoxusnál, minden egyes irracionális számot meghatároz a racionálisakhoz viszonyított helyzete, és ha most a racionális és irracionális számok együttes $\mathbb{R}$ halmazát tekintjük, akkor látjuk, hogy a konstrukció miatt nincsenek $\mathbb{R}$-ben hézagok.

A kontinuumnak ez a definíciója nagyon meggyőző, viszont szerepel benne egy határozott elkötelezettség a befejezett (vagy aktuális) végtelen iránt: minden pontot a racionális számok egy halmazával (például $\mathbb{Q}_K$-val) adtunk meg, és így $\mathbb{R}$ maga ilyen halmazok *halmaza*. Talán az még elkerülhető, hogy $\mathbb{Q}_K$-t befejezett végtelennek tekintsük, hiszen elemeit egymás után felsorolhatjuk, mint az $1, 2, 3, \ldots$

számokat, de $\mathbb{R}$ elemeivel kapcsolatban ilyen lehetőség már nincs. A kontinuummal kapcsolatos modern erőfeszítések Cantornak ezzel az 1870-es évekből származó megfigyelésével kezdődtek.

3. Megszámlálható és nem-megszámlálható

A *megszámlálhatóan* végtelen halmazok azok, melyek (elemei) elrendezhetők (felsorolhatók) olymódon, hogy minden elemet csak véges sok elem előz meg. A mintapélda a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza, melynek természetes rendezése egy ilyen lista:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \ldots.$$

Mivel tetszőleges elem véges sok lépésben elérhető (itt az 1-gyel való növelés számít egy lépésnek), a felsorolás folyamán sosem szükséges egyszerre végtelen sok lépést elképzelni ahhoz, hogy egy adott értékig eljussunk. Viszont a felsorolást mindig folytathatjuk, ezért a megszámlálható halmazokat úgy is tekinthetjük, mint amelyek *potenciálisan,* de nem *aktuálisan* végtelenek. A végtelenségnek csak ezt a típusát tekintették létezőnek az ókori görögök és más kiváló matematikusok, például Gauss is.

Egy kis leleményességgel sok további hasznos végtelen halmazt is „felsorolhatunk", és ezért létezésüket elfogadhatjuk az előbbi szigorú normák szerint is. Ilyen halmazt alkotnak például az egészek:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ 5,\ -5,\ 6,\ -6,\ \ldots,$$

a pozitív racionális számok:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

(itt a felsorolás szabálya az, hogy először azokat a törteket soroljuk fel, melyek számlálóinak és nevezőinek összege 2, aztán azokat, melyeknél ez az összeg 3, majd azokat, melyeknél ez az összeg 4 stb.) és az összes racionális szám:

$$0,\frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ -\frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \ldots.$$

Egy kifinomultabb példa az algebrai számok halmaza, miként arra Cantor 1874-ben rámutatott. Minden algebrai szám egy $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ alakú egész együtthatós polinomegyenlet gyöke, melyhez Cantor az $|n| + |a_n| + |a_{n-1}| + + \cdots + |a_1| + |a_0|$ „magasságot" rendelte. Egy adott természetes számhoz csak véges sok olyan magasságú polinomegyenlet van, és természetesen minden polinomegyenletnek csak véges sok gyöke van. Ezért az algebrai számok egy felsorolása előállítható a polinomegyenletek magasság szerint rendezett listájából.

Ezek a példák azt mutatják, hogy a megszámlálhatóan végtelen halmazok fogalma meglehetősen széles, emiatt talán azt is remélhetnénk, hogy minden végtelen halmaz megszámlálható, s ezért csupán „potenciálisan" végtelen. Úgy tűnik, maga Cantor is hitt abban, hogy be fogja tudni bizonyítani $\mathbb{R}$ megszámlálhatóságát és nagyon meglepte, mikor ennek ellenkezőjét igazolta 1873 végén. Első reakciója egy pozitív következmény levezetése volt: egy új bizonyítás arra, hogy nem minden szám algebrai; 1874-ben először ebben a formában tárta a világ elé a nem-megszámlálható halmazokat.

Természetesen, nem sokkal ezután felismerték $\mathbb{R}$ nem megszámlálható voltának alapvető jelentőségét, ennek fontossága legalább három különböző bizonyításban is tükröződik.

- Minden megszámlálható halmaz tartalmaz hézagokat (Cantor, 1874).

Cantor megmutatta, hogy valós számok egy tetszőlegesen adott $x_0, x_1, x_2, \ldots$ listájában mindig találhatunk „hézagot", azaz a listának olyan $a_0 < a_1 < a_2 <$ $< \cdots < b_2 < b_1 < b_0$ elemeit, melyekhez nem létezik x_i az a_j-k és b_k-k között. Ezzel általánosítja az ismert megszámlálható halmazokban előforduló ismert hézagokat (mint amilyen például $\sqrt{2}$ a racionálisak halmazában).

- Minden megszámlálható halmaz nullmértékű (Harnack, 1885).

Harnack konstrukciója szerint valós számok egy tetszőlegesen adott $x_0, x_1, x_2, \ldots$ rendszerében fedjük le x_i-t egy $\varepsilon/2^{i+1}$ hosszú intervallummal, ekkor a teljes $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ halmazt egy ε-nál kisebb összhosszú intervallumrendszerrel fedtük le. Mivel a valós számegyenes hossza végtelen, az $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ számok $\mathbb{R}$-ből majdnem minden elemet kihagynak.

- Minden megszámlálható halmaz diagonalizálható (Cantor, 1891).

Cantor konstrukciója szerint valós számok egy tetszőlegesen adott $x_0, x_1, x_3, \ldots$ rendszeréhez létezik olyan x szám, mely mindegyik x_i-től különbözik: elegendő x i-edik tizedesjegyét x_i i-edik tizedesjegyétől eltérően választani (közben arra is figyelni kell, hogy az előálló x-nek ne legyen két különböző tizedestört előállítása).

Az első bizonyítás az irracionális számok Dedekind-féle definíciójára emlékeztet, mely szerint az irracionális számok a racionálisak közti hézagok. Ez feltárja a kellemes harmóniát a „teljesség" ókori és modern értelmezése között: ha $\mathbb{R}$ teljes abban az értelemben, hogy nincsenek benne hézagok, akkor befejezett végtelenként kell elfogadnunk, mert nem megszámlálható. A második és harmadik bizonyítás a halmazelmélet két igen fontos témaköre felé tekint: ezek a mérhetőség és az átlós érvelések, melyek nagyobb halmazokra is általánosíthatók.

Speciálisan, az átlós módszerből azonnal következik, hogy tetszőleges X halmaz kisebb, mint ($\mathcal{P}(X)$-szel jelölt) hatványhalmaza (X hatványhalmaza X összes részhalmazának halmaza). Ha ugyanis $x \mapsto S_x$ bijektív megfeleltetés lenne X elemei és részhalmazai közt, akkor a diagonális módszerrel előálló $S = \{x \in X : x \notin S_x\}$ halmaz mindegyik S_x-től különbözni fog (x-et S és S_x közül pontosan egyikük tartalmazza). Tehát X-nek több részhalmaza van, mint eleme.

4. Kontinuum számosságú halmazok

A halmazok „méretét" az előző példákban implicit módon használtuk. Azt, hogy egy halmaz „kisebb" egy másiknál, 1–1-értelmű leképezések segítségével formalizálhatjuk. Cantor az A és B halmazokat akkor mondta egyenlő számosságúnak, ha van A és B között bijekció (ezt így jelöljük: $|A| = |B|$). Tehát, definíció szerint, minden megszámlálható halmaz ugyanolyan számosságú, mint $\mathbb{N}$, Cantor ezt a számosságot $\aleph_0$-nak nevezte.

Hasonlóan, $|A| \leq |B|$ azt jelöli, hogy van injektív függvény A-ból B-be, továbbá $|A| < |B|$ jelöli, hogy $|A| \leq |B|$ de $|A| \neq |B|$. Igen hasznos a Cantor–Schroeder–Bernstein-tétel, mely szerint, ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$; ezzel sok esetben elkerülhető a bijekciók explicit megadása. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy A és B számossága azonos, elegendő A-t injektíven B-be és B-t injektíven A-ba képezni. A Cantor–Schroeder–Bernstein-tételnek köszönhetően könnyű igazolni, hogy a következő halmazok számossága azonos $\mathbb{R}$ számosságával:

- Tetszőleges intervallum – nyílt, félig nyílt vagy zárt,
- Speciálisan, a $[0, 1)$ intervallum (melyet a diadikus számokkal azonosítunk),
- A végtelen 0–1-sorozatok $2^{\mathbb{N}}$-nel jelölt halmaza.

Emiatt $\mathbb{R}$ számosságát $2^{\aleph_0}$-val jelöljük. Azt is látjuk, hogy $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, hiszen van triviális injekció $\mathbb{N}$-ből $\mathbb{R}$-be, de a fordított irányban ilyen függvény nincs, mivel $\mathbb{R}$ nem megszámlálható. Ha a végtelen 0–1-sorozatokat $\mathbb{N}$ részhalmazai karakterisztikus függvényeinek tekintjük, akkor azt is látjuk, hogy $\mathbb{N}$ részhalmazainak $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmaza szintén $2^{\aleph_0}$ számosságú.

Tetszőleges σ végtelen $0 - 1$-sorozat felbontható két ilyen sorozatra, mondjuk σ_0-ra és σ_1-re, ahol σ_0 az eredeti σ páros indexű tagjaiból, σ_1 pedig a páratlan indexű tagjaiból áll. Fordítva, a (σ_0, σ_1) pár meghatározza σ-t. Ez az észrevétel adja Cantor 1877-es felfedezését, amely a „látom, de nem hiszem el" felkiáltásra késztette: az $\mathbb{R}^2$ sík egyenlő számosságú az $\mathbb{R}$ egyenessel.

Általánosabban, σ-t három, négy, ... vagy akár végtelen sok sorozatra is szétvághatjuk. (Végtelen sok sorozatot kapunk, ha az i-edik részsorozatba σ-nak azon tagjait soroljuk, melyek indexe pontosan i különböző prímtényezőt tartalmaz.) Emiatt a következő halmazok mindegyike azonos számosságú $\mathbb{R}$-rel:

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^\omega$, ahol $\mathbb{R}^\omega$ jelöli a valós számokból álló végtelen sorozatokat,
- Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú folytonos függvények halmaza (mert minden ilyen függvényt egyértelműen meghatároz, hogy milyen értékeket vesz fel a megszámlálható sok racionális számon, azaz minden ilyen függvény megadható $\mathbb{R}^\omega$ egy elemével).

Ugyanakkor, az átlós érvelés szerint $\mathbb{R}$-nek több részhalmaza van mint eleme, tehát az eddig említett halmazok egyike se olyan nagy, mint az $\mathbb{R}$ összes részhalmazából álló $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ halmaz, vagy mint az összes valós függvények halmaza, e két utóbbi halmaznak egyaránt $2^{2^{\aleph_0}}$ a számossága. Mindemellett, $2^{\aleph_0}$ olyan gyakran bukkan fel mint $\mathbb{R}$ valamely nem-megszámlálható részhalmazának számossága, hogy ez a jelenség 1878-ban Cantort a következő sejtés megfogalmazására késztette: $\mathbb{R}$ *minden* nem-megszámlálható részhalmazának $2^{\aleph_0}$ a számossága. Ez volt a kontinuum-hipotézis első változata.

Gyenge kontinuum-hipotézis (Cantor, 1878). *A valós számok bármely nem-megszámlálható részhalmazának* $2^{\aleph_0}$ *a számossága.*

5. Nem-megszámlálható rendszámok

1883-ban Cantor egy másik módszert is talált arra, hogy megszámlálhatónál nagyobb számosságokat konstruáljon. Ez a másik módszer bonyolultabb a hatványhalmaz képzésnél, ugyanakkor finomabb is, mivel a *legkisebb* nem-megszámlálható halmazt állítja elő. Cantor általánosította a számlálást a végtelenre, amiből a *rendszámok* következő sorozatát kapta meg:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ \omega 2,\ \omega 2+1,\ \omega 2+2,\ \ldots.$$

Ehhez Cantor a következő intuitív elveket használta:

- 0 a legkisebb rendszám,
- tetszőleges α rendszámnak pontosan egy rákövetkezője van (ezt $\alpha+1$-gyel jelöljük),
- rendszámok tetszőleges S halmazának van legkisebb felső korlátja (szuprémuma).

Az 1920-as években Neumann János ezeket az elveket az alábbi definícióval formalizálta.

- $0 = \emptyset$ (üres halmaz)
- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ (amiből $n+1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ adódik minden véges n-re),
- $\sup(S) = \cup_{\beta \in S} \beta$ (amiből $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ adódik).

A rendszámokat az $\in$ (eleme) reláció jólrendezi, azaz a rendszámokon $\in$ lineáris rendezés, és rendszámok tetszőleges nemüres halmazának van $\in$ szerint legkisebb eleme. Továbbá minden jólrendezett halmaz izomorf egy (és csak egy) rendszámmal, ezért a jólrendezések „mérhetők" a rendszámok segítségével.

A véges rendszámok pontosan a természetes számok, ezek legkisebb felső korlátja ω, az első végtelen rendszám. A megszámlálható rendszámok $\omega, \omega+1$, $\omega+2, \ldots \omega 2, \ldots$ egy hatalmas összességet alkotnak, amit Cantor *második számosztálynak* nevezett. Ez az osztály zárt a rákövetkezésre és megszámlálható unióra, viszont ez az osztály is egy halmaz, ezért van legkisebb felső korlátja, amit ω_1-gyel jelölünk. Nyilván ω_1 a legkisebb nem-megszámlálható rendszám, számosságát $\aleph_1$-nek nevezzük. Ezek alapján Cantor a kontinuum-hipotézist a következőképp élesítette:

Erős kontinuum-hipotézis (Cantor, 1883). $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

6. A kiválasztási axióma

Az erős kontinuum-hipotézis tetszetősebb a gyenge kontinuum-hipotézisnél, ugyanakkor kevésbé kézenfekvő, mert például következik belőle, hogy $\mathbb{R}$ *jólrendezhető*. Ha ugyanis adott a valós számok és a megszámlálható rendszámok között egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, akkor $\mathbb{R}$-en jólrendezést kapunk, ha két valós számot a nekik megfelelő rendszámok viszonya szerint rendezünk.

Cantor hitt abban, hogy minden halmaz jólrendezhető, bár ilyen rendezés $\mathbb{R}$-en nem ismert. Egy S halmaz jólrendezhetőségéből többek között következik, hogy S (nemüres) részhalmazain van *kiválasztási függvény,* azaz olyan f függvény, melyre teljesül, hogy $f(X) \in X$ az S minden nemüres X részhalmazára. Konkrétabban, $f(X)$-et mindig X – a jólrendezés szerinti – legkisebb elemének választhatjuk. Fordítva, egy S nemüres részhalmazain értelmezett kiválasztási függvényből S egy jólrendezése előállítható.

Ezt a *jólrendezési tételt* először Zermelo bizonyította 1904-ben, s a bizonyítás akkoriban vitákat váltott ki, ma azonban a transzfinit indukció „magától értetődő" alkalmazásának tekintik. Ahogy a szokásos teljes indukció azon alapszik, hogy minden természetes szám elérhető a 0-ból rákövetkezési művelettel, a transzfinit indukció azon múlik, hogy minden rendszám elérhető a rákövetkezési és a szuprémumképzési művelettel.

Ha S részhalmazain adott az f kiválasztási függvény, akkor S elemeit transzfinit módon felsorolhatjuk a következő módon:

$$\begin{aligned} s_0 &= f(S), \\ s_1 &= f(S - \{s_0\}), \\ &\ \vdots \\ s_\beta &= f(S - \{s_\alpha : \alpha < \beta\}), \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Ez az eljárás S elemeit rendszámokkal indexeli, méghozzá a következő értelemben „korlátlanul": ha S elemeinek a már megindexelt $\{s_\alpha : \alpha < \beta\}$ részhalmaza nem az egész S, akkor S legalább egy további elemét indexelhetjük β-val. Emiatt S összes eleméhez tudunk rendszámindexet rendelni, ami S egy jólrendezését adja.

Zermelo kiválasztási függvényekre vonatkozó feltevését *kiválasztási axiómának* nevezzük, mert ez a halmazelmélet többi axiómájából nem bizonyítható. A legtöbb matematikus elfogadja Zermelonak ezt az axiómáját, mert az a matematika sok más területét szabályosabbá teszi. Speciálisan, fel szokták tenni, hogy $\mathbb{R}$ jólrendezhető és ezért számossága valamelyik „alef": $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$, melyek $\aleph_1$ előbbi konstrukciójának iterálásával nyerhetők. Ugyanakkor, a kiválasztási axióma (és ezért az erős kontinuum-hipotézis is) olyan következményeket is maga után von, melyek $\mathbb{R}$-et bizonyos értelemben nagyon szabálytalanná teszik. Például ilyen következmény az, hogy $\mathbb{R}$-nek van *nem-mérhető* részhalmaza.

7. Mérték

Mivel a kontinuum-hipotézis $\mathbb{R}$ összes nem-megszámlálható részhalmazáról állít valamit, természetes közelebbről is megvizsgálni ezeket a halmazokat és megnézni, ezek közül melyekről bizonyítható, hogy számosságuk $2^{\aleph_0}$. Ebben az irányban Cantor tette meg az első lépést igazolva, hogy egy zárt és nem-megszámlálható halmaz számossága $2^{\aleph_0}$. Nagyobb előrelépés 1900 körül következett be a francia analízis iskola munkássága nyomán, melynek vezetői Borel, Baire és Lebesgue voltak. Az integrálelmélet igényei miatt halmazok egy igen bő osztályát kellett vizsgálniuk.

A hagyományos Riemann-féle értelemben minden folytonos függvény integrálható, de a legtöbb nem folytonos függvény nem az. Még azok a függvények se feltétlenül Riemann-integrálhatók, melyek előállíthatók egy folytonos függvényekből álló monoton növő függvénysorozat határfüggvényeként. A problémát az okozza, hogy a hagyományos területfogalom nem elég általános ahhoz, hogy értelmet tulajdonítson az „f függvény grafikonja alatti területnek", még akkor sem, ha f egy folytonos függvénysorozat határfüggvénye.

1898-ban Borel a mérték fogalmát kiterjesztette $\mathbb{R}^n$ összes olyan részhalmazára, melyek a nyílt halmazokból származtathatók komplementumképzéssel és megszámlálható sok halmaz uniójának képzésével. Ma ezeket a halmazokat *Borel-halmazoknak* nevezzük, és a következő szabályok szerint mindegyikükhöz egyértelműen definiált mértéket rendelhetünk:

- Nyílt intervallumok Descartes-szorzatának mértéke egyenlő ezen intervallumok hosszainak szorzatával. (Általánosabban, egybevágó halmazok egyenlő mértékűek.)
- Ha $A \subseteq B$ továbbá A és B mértékei rendre $\mu(A)$ és $\mu(B)$, akkor $B - A$ mértéke
$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$
- Ha B a diszjunkt $A_0, A_1, A_2, \ldots$ halmazok uniója, melyek mértéke rendre $\mu(A_0), \mu(A_1), \mu(A_2), \ldots$, akkor
$$\mu(B) = \mu(A_0) + \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots .$$

A Borel-halmazok nyilván tartalmazzák a nyílt halmazokat, (hiszen ezek előállíthatók intervallumok szorzatainak megszámlálható unióiként), továbbá a zárt halmazokat (mint a nyiltak komplementumait), de ezeknél jóval tágabb osztályt alkotnak. A Borel-halmazoknak van egy természetes, ω_1 szintből álló hierarchiája: a legalsó szinten a nyílt és a zárt halmazok vannak és ha β tetszőleges megszámlálható rendszám, akkor a β-adik szint azokból a halmazokból áll, melyek előállíthatók β-nál kisebb szinthez tartozó halmazok megszámlálható uniójaként. Az átlós módszert használva Lebesgue 1905-ben bizonyította, hogy minden megszámlálható β rendszámhoz van olyan halmaz, mely a β-adik szinthez tartozik, de a korábbi szinteken még nem fordul elő.

Tehát a Borel-halmazok bonyolultsága ω_1 lépésen keresztül szigorúan nő, s ezzel a mérhetőséget ki lehet terjeszteni a nyílt és zárt halmazoknál lényegesen komplikáltabb halmazokra. A *Lebesgue-mérhető* halmazok még ennél is tovább mennek egy kicsit, nullmértékűnek definiálva egy tetszőleges nullmértékű Borel-halmaz összes részhalmazát. Az ennek megfelelő *Lebesgue-integrál* a folytonos függvényeknél jóval bővebb függvényosztályra alkalmazható. Sőt, a Lebesgue-integrálható függvények osztályának előnyösebb tulajdonságai vannak, például zártak a monoton konvergenciára és más hasonló műveletekre nézve.

A Borel-halmazok szintén kielégítik a gyenge kontinuum-hipotézist, azaz minden nem-megszámlálható Borel-halmaz számossága $2^{\aleph_0}$. Ezt 1915-ben Alekszandrov bizonyította, aki Moszkvában Luzin csoportjának volt tagja. Ez a csoport a francia iskola eredményeit és módszereit sikeresen általánosította a Borel-halmazoknál sokkal bonyolultabb halmazokra.

Lebesgue egy 1905-ös dolgozatában – kicsit gondatlanul – azt állította, hogy a Borel-halmazok rendelkeznek még a következő zártsági tulajdonsággal is: egy Borel-halmaz merőleges vetülete is Borel-halmaz. 1916-ban Szuszlin – akkor még, mint Luzin diákja – ellenpéldát talált erre az állításra, s így megmutatta, hogy *a vetítés művelete egy bővebb halmazosztályhoz vezet.* A Borel-halmazokból vetítéssel és komplementálással származtatható halmazokat ma *projektív halmazoknak* hívjuk, ezek egy ω magas hierarchiába rendezhetők. Az első szinten a Borel-halmazok vetületei és ezek komplementumai vannak, általában az $n+1$-edik szint az előző szinten lévő halmazok vetületeiből és ezek komplementumaiból áll. A Borel-halmazok vetületeit *analitikus halmazoknak* nevezzük.

1917-ben Luzin igazolta, hogy az analitikus halmazok mérhetőek és kielégítik a gyenge kontinuum-hipotézist. Ugyanakkor ezeket az eredményeit nem sikerült kiterjesztenie a projektív hierarchia magasabb szintjeire, végül 1925-ben eljutott a következő kockázatos jóslat megfogalmazásáig:

Nem tudjuk, és soha nem is fogjuk megtudni, hogy egy analitikus halmaz komplementumának vetülete (feltéve, hogy nem megszámlálható) kontinuum számosságú-e, illetve, hogy mérhető-e.

(Luzin, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **180** (1925), 1818. oldal)

Miért volt Luzin ennyire pesszimista a számosság és mérhetőség meghatározásával kapcsolatban? Nos, ekkor az már ismert volt, hogy a kiválasztási axiómából következik, hogy van nem-mérhető halmaz. Ezt Vitali bizonyította 1905-ben, s a Vitali-féle nem-mérhető N halmaz nagyon egyszerűen definiálható egy $\mathbb{R}$ (nemüres) részhalmazain megadott kiválasztási függvényből az alábbi módon:

Definiáljuk $\mathbb{R}$-en a $\cong$ ekvivalenciarelációt az „$x \cong y \Leftrightarrow x - y$ racionális" előírással, és legyen N olyan halmaz, mely minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Ha N minden elemét a $[0,1]$ intervallumból választjuk, könnyű meggondolni, hogy az $\mathbb{R}$ mod 1 kör előállítható N megszámlálható sok (racionális számmal való) eltoltjának diszjunkt uniójaként. Ha N mérhető volna, akkor az összes eltoltjának is $\mu(N)$ lenne a Lebesgue-mértéke, s így $\mu(N) = 0$-ból valamint $\mu(N) > 0$-ból is ellentmondás következne.

Ebben a konstrukcióban az egyetlen bizonytalan pont a kiválasztási függvény, mely minden $\cong$-ekvivalenciaosztályból kiválaszt egy elemet. A kiválasztási axióma garantálja ilyen függvény létezését, de nem ad semmilyen további információt ezekről a függvényekről. Tudjuk ugyanakkor, hogy $\mathbb{R}$ egy jólrendezéséből azonnal előállítható egy kiválasztási függvény, ezért a nem-mérhető N halmaz bonyolultsága lényegében azonos $\mathbb{R}$ egy jólrendezésének bonyolultságával, ha ez utóbbi egyáltalán létezik. (Speciálisan, ha $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, akkor $\mathbb{R}$-nek van ω_1 típusú jólrendezése és így van olyan nem-mérhető halmaz, amely nagyjából ugyanakkora bonyolultságú. Emiatt állítottuk az előző fejezet végén, hogy az erős kontinuum-hipotézis $\mathbb{R}$-et bizonyos szempontból igen szabálytalanná teszi.)

Luzin nyilván azt gyanította, hogy a projektív hierarchia alacsony osztályaiban is lehetnek már $\mathbb{R}$-et jólrendező relációk és így nem-mérhető halmazok is. Luzin jó nyomon járt, de a halmazelmélet nem fejlődhetett tovább ebben az irányban addig, amíg ki nem épültek a matematikai logika ehhez szükséges új eszközei.

8. Gödel és Cohen

Gödel 1931-ből származó két nagyszerű tétele, az első és második *nem-teljességi* tétel az átlós módszer segítségével született, s ezért mondhatjuk, hogy közvetlenül a halmazelmélet inspirálta őket. Valóban, az a fajta „nem-teljesség", amire az első nem-teljességi tétel utal, hasonló $\mathbb{R}$ megszámlálható részhalmazainak nem-teljességéhez.

Hogy lássuk, miért van ez így, vegyük észre, hogy az előre adott $x_0, x_1, x_2, \ldots$ számok mindegyikétől különböző „átlós" x szám *kiszámítható* $x_0, x_1, x_2, \ldots$-ből. Konkrétabban, x-et például így adhatjuk meg:

$$\text{az } x \text{ szám } n\text{-edik tizedesjegye} = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_n \ n\text{-edik tizedesjegye nem } 1; \\ 2 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha az $x_0, x_1, x_2 \ldots$ lista kiszámítható abban az értelemben, hogy van olyan algoritmus, amely i-ből és j-ből meghatározza x_j-nek az i-edik tizedesjegyét, akkor x is kiszámítható abban az értelemben, hogy van algoritmus, mely n-ből meghatározza x-nek az n-edik tizedesjegyét. Ebből következik, hogy nem lehet az összes kiszámítható valós számot egy (az előbbi értelemben) kiszámítható listában felsorolni. Ennek az eredménynek axiómarendszerekre vonatkozó következményei is vannak, mert az axiómarendszerekről fel szokták tenni, hogy belőlük tételek egy kiszámítható listája állítható elő. Ez azt jelenti, hogy nem létezhet olyan ellentmondástalan (azaz konzisztens) axiómarendszer, melynek következményei (tételei) tartalmaznák az összes olyan alakú (igaz) állítást, hogy „az n-edik program egy kiszámítható valós számot definiál". Ugyanis, ha lenne ilyen axiómarendszer, tételei kiszámítható listájának diagonalizálásával egy újabb, minden eddigitől különböző kiszámítható valós számot (előállító programot) konstruálhatnánk. (Egy ellentmondásos (inkonzisztens) axiómarendszer tételei persze kiszámítható listába rendezhetők és ebben a listában az összes előbbi alakú tétel szerepelni fog, de csak azért, mert ellentmondásos axiómarendszerek tételei közt minden minden állítás szerepel!)

Ez az informális okoskodás nem Gödel eredeti bizonyítása, hanem Post egy 1921-es gondolatmenetéhez áll közel. Post azonban – lényegében az előbbi gondolatokra épülő – eredményét csak 20 évvel később publikálta. Gödel nem beszélhetett kiszámítható valós számokról, mert 1931-ben a kiszámíthatóság matematikai definíciója még nem állt rendelkezésre. Másrészt mára (sőt Turing 1936-os vizsgálatai óta) a kiszámíthatóság fogalma közismert, s azt is tudjuk, hogy a halmazelmélet bármely axiómarendszerében formalizálható. Fennáll tehát

Gödel első nem-teljességi tétele. *A halmazelmélet tetszőleges konzisztens Σ axiómarendszeréhez van olyan τ igaz állítás a valós számokról, amely Σ-ból nem bizonyítható.*

A második nem-teljességi tétel – bár erősebbnek tűnik – mégis az első nemteljességi tételből adódik, ha megvizsgáljuk benne a Σ konzisztenciájára vonatkozó feltétel szerepét. Ez a feltétel maga is kifejezhető a Σ axiómarendszer nyelvén, egy $\mathrm{Con}(\Sigma)$ formulával (feltéve, hogy Σ eléggé erős). De $\mathrm{Con}(\Sigma)$ nem bizonyítható Σ-ból, mert – mint kiderül – következne belőle a nem bizonyítható τ Gödel-mondat. Ezért fennáll:

Gödel második nem-teljességi tétele. *Ha Σ konzisztens és eléggé erős axiómarendszere a halmazelméletnek, akkor* $\mathrm{Con}(\Sigma)$ *nem bizonyítható Σ-ból.*

Az „eléggé erős" kitétel itt azt jelenti, hogy Σ elég erős ahhoz, hogy kifejezhetők és bizonyíthatók legyenek benne a kiszámíthatóság alapvető tulajdonságai; speciálisan, Σ-ban ki kell tudni fejezni a bizonyíthatósági relációt. Nagyon gyenge axiómarendszerek, például a számelmélet bizonyos fragmentumai erre már alkalmasak, és természetesen a halmazelmélet szokásos axiómarendszerei is mind ilyenek, hiszen ezekről feltételezzük, hogy *minden* matematikai fogalom formalizálható bennük.

Gödel tételei szerint, bár ezekben az axiómarendszerekben minden matematikai fogalom formalizálható, mégsem lehet bennük minden igaz állítást bebizonyítani, azaz a bennük bizonyítható állítások „hézagosak", csakúgy, mint $\mathbb{R}$ megszámlálható részhalmazai. Ugyanakkor úgy tűnik, különbség van a számelméletben, illetve a halmazelméletben megtalálható hézagok között. Senki sem számít arra, hogy az ikerprím sejtéshez hasonló klasszikus számelméleti sejtések bármelyike igaz, de nem bizonyítható. A számelméletben minden ismert igaz, de nem bizonyítható állítás logikai eredetű, mint például $\mathrm{Con}(\Sigma)$ vagy ennek variánsai. Ezzel szemben, a halmazelmélet nem bizonyítható állításai közt rendkívül érdekes állítások is vannak, mint például a kiválasztási axióma, a kontinuum-hipotézis, vagy nem-mérhető halmazok létezése.

A halmazelméletben megbúvó hézagok feltárása terén Gödel tette meg az első lépést 1938-ban, a ma már klasszikusnak számító Zermelo–Fraenkel-féle (ZF-fel jelölt) axiómarendszer vizsgálatával. Gödel megmutatta, hogy bizonyos állításokat nem lehet megcáfolni:

Gödel konzisztenciatételei. *A ZF-axiómákkal konzisztens:*

a kiválasztási axióma,

a kontinuum-hipotézis és az, hogy

a projektív hierarchia második szintjén van nem-mérhető halmaz.

Gödel úgy bizonyította ezeket az eredményeket, hogy megadta a ZF-axiómák egy modelljét, az úgynevezett *konstruálható* halmazok osztályát. Durván szólva azok a halmazok konstruálhatók, melyek „megnevezhetők" azon a nyelven, melyet úgy kapunk, hogy ZF nyelvét kibővítjük minden egyes rendszám egy nevével. Könnyen adódik, hogy a konstruálható halmazok univerzuma kielégíti a ZF-axiómákat, s a konstruálható halmazok jólrendezhetők, mert a „nevekre" egy – abc-sorrendhez hasonló – jólrendezés öröklődik a rendszámok rendezéséből. Egy jóval mélyebb bizonyítás mutatja, hogy egy konstruálható valós számnak olyan neve is van, amelyben csak megszámlálható rendszámok szerepelnek, emiatt csak $\aleph_1$ konstruálható valós szám van, tehát a konstruálható halmazok körében igaz a kontinuum-hipotézis. Végül megmutatható, hogy a konstruálható valós számok jólrendezése a projektív hierarchia második szintjén lévő halmaz, ezért ugyanezen a szinten vannak nem-mérhető halmazok is.

Gödel hitt abban, hogy a kiválasztási axióma és a kontinuum-hipotézis valójában se nem bizonyítható, se nem cáfolható a ZF-axiómákból, de ennek az első felét nem tudta bizonyítani. Sejtéseit végül 1963-ban Cohen igazolta:

Cohen függetlenségi tételei. *A kiválasztási axióma és a kontinuum-hipotézis nem bizonyítható ZF-ben.*

Hogy ezt megmutassa, Cohen bevezetett egy – általa „forszolásnak" nevezett – rendkívül hatékony új módszert, amely ZF egy kis modelljéhez úgy vesz hozzá elemeket, hogy a ZF axiómák érvényessége megmarad, de bizonyos más állítások hamissá válnak. Speciálisan megmutatta, hogy a Zermelo–Fraenkel-axiómák és a kiválasztási axióma egyszerre kielégíthetők úgy, hogy $2^{\aleph_0}$ értéke majdnem tetszőleges legyen. Például $2^{\aleph_0}$ lehet $\aleph_2, \aleph_3$ vagy $\aleph_{\omega+1}$, így a kontinuum-hipotézis sok különböző módon válhat hamissá.

Együttvéve, Gödel és Cohen eredményei azt mutatják, hogy a halmazelmélet szokásos axiómarendszerei lényeges módon nem-teljesek, mert a halmazokkal kapcsolatos alapvető kérdéseket sem válaszolják meg maradéktalanul. Ezt a helyzetet Gödel már 1947-ben előre látta:

„Jó okunk van azt gyanítani, hogy a kontinuum-probléma szerepe a halmazelméletben az lesz, hogy tanulmányozásával előbb-utóbb olyan új axiómákat fedezzünk fel, melyek lehetővé teszik, hogy Cantor sejtését megcáfoljuk."

American Mathematical Monthly, **54** (1947), 254. oldal

Kezdetben Cohen is hasonló véleményen volt [2]:

„A szerző érzése szerint előbb-utóbb el fogják fogadni, hogy a kontinuum-hipotézis nyilvánvalóan hamis. ... $\aleph_1$ a megszámlálható rendszámok halmaza, s ez csupán egy speciális, méghozzá a legegyszerűbb mód arra, hogy egy $\aleph_0$-nál nagyobb számosságot állítsunk elő. ... Ezzel ellentétben, a C halmazt (a kontinuumot) egy teljesen új és igen erős elv, a hatványhalmaz axióma segítségével állítottuk elő."

Ahogy ennek a cikknek az elején láttuk, 20 évvel később Cohen megbékélt a helyzettel, s a kontinuum értékének határozatlansága már nem zavarta. Pedig ebben az időben már az új axiómák keresése is igen messzire jutott.

9. Nagy-számosság axiómák

Durván szólva a ZF-axiómák a következőket állítják:

- $\mathbb{N}$ egy halmaz,
- bizonyos műveletek eredményeképpen halmazokat kapunk. A legfontosabb ilyen műveletek a *hatványhalmaz képzés* (azaz vehetjük egy tetszőleges halmaz összes részhalmazának halmazát) és a *helyettesítés* (azaz vehetjük egy tetszőleges halmazon értelmezett tetszőleges függvény értékkészletét).

Ezért ZF-nek modellje minden olyan halmaz, amely tartalmazza $\mathbb{N}$-et, továbbá zárt a hatványhalmaz képzésre és a helyettesítésre. Az ilyen halmazokat *erősen elérhetetlennek* nevezzük, és létezésüket nem nehéz elfogadni, ha hiszünk a ZF-axiómák igazságában. Ugyanakkor az erősen elérhetetlen halmazok létezése (ZF-ben) nem *bizonyítható*, hiszen ebből $\mathrm{Con}(ZF)$ (ZF konzisztenciája) következne, ami ellentmondana Gödel második nem-teljességi tételének.

Az tehát új axióma, hogy léteznek erősen elérhetetlen halmazok. Az ilyen típusú axiómákat *végtelenségi axiómáknak, vagy nagy-számosság axiómáknak* nevezzük, mert olyan halmazok létezését állítják, melyek nagyobbak minden, ZF-ben bizonyíthatóan létező halmaznál. Máig sok egyéb nagy-számosság axiómát tanulmányoztak, és a hozzájuk tartozó számosságok jól használhatók a létezésükből levonható következmények ún. „konzisztencia-erejének" mérésére. Az ilyen eredmények általában

$$\mathrm{Con}(ZF + A \text{ axióma}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Con}(ZF + B \text{ axióma})$$

alakúak, tehát azt fejezik ki, hogy $ZF + B$ *relatíve*, $ZF + A$-hoz képest konzisztens. Ha ennek fordítottja is igaz, akkor $ZF + A$ és $ZF + B$ *ekvikonzisztensek*.

Például ilyen típusú érdekes kapcsolat van mérhetőségi feltevések és bizonyos nagy-számosság axiómák között.

Vitali példájából tudjuk, hogy ha a kiválasztási axióma igaz, akkor $\mathbb{R}$-nek van nem Lebesgue-mérhető részhalmaza; ugyanakkor, ha a mértéktől nem követeljük meg az eltolásinvarianciát (azaz csak a megszámlálható additivitást írjuk elő), akkor a kiválasztási axiómával kapcsolatos konfliktus eltűnik. Pontosabban, azt mondjuk, hogy egy κ számosság *valós mérhető*, ha van olyan $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to [0,1]$ κ-additív halmazfüggvény, amelyre teljesül, hogy $X \subseteq \kappa, |X| < \kappa$ esetén $\mu(X) = 0$. Feltehetjük, hogy $2^{\aleph_0}$ valós mérhető, azaz, hogy ebben a gyengébb értelemben $\mathbb{R}$

összes részhalmaza mérhető, de ekkor a kontinuum nagyon nagy lesz – legalább akkora, mint a legkisebb gyengén elérhetetlen (vagyis reguláris limesz-) számosság. Ezt 1930-ban Ulam fedezte fel. *Mérhető számosságoknak* nevezzük azokat a κ számosságokat, melyeken van olyan (nemtriviális) mérték, amely szerint κ minden részhalmaza mérhető, továbbá minden ilyen részhalmaz mértéke vagy 0 vagy 1. Konzisztencia erő szempontjából a következőket állíthatjuk:

$$\mathrm{Con}\,(ZF + \text{kiválasztási axióma} + \text{„van mérhető számosság''}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Con}\,(ZF + \text{kiválasztási axióma} + \text{„}2^{\aleph_0}\text{ valós mérhető''})$$

továbbá

$$\mathrm{Con}\,(ZF + \text{kiválasztási axióma} + \text{„van mérhető számosság''}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Con}\,(ZF + \text{kiválasztási axióma} + \text{„van erősen elérhetetlen számosság''}).$$

Másrészről, 1970-ben Solovay megmutatta, hogy ha elhagyjuk a kiválasztási axiómát, akkor már az is konzisztens, hogy $\mathbb{R}$ minden részhalmaza Lebesgue-mérhető, feltéve, hogy $\mathrm{Con}\,(ZF + \text{kiválasztási axióma} + \text{„van erősen elérhetetlen számosság''})$ igaz. Shelah 1984-ben bebizonyította Solovay előző relatív konzisztencia eredményének megfordítását, ezért az alábbi két axiómarendszer ekvikonzisztens:

$$ZF + \text{„}\mathbb{R}\text{ minden részhalmaza Lebesgue-mérhető''}$$

$$ZF + \text{kiválasztási axióma} + \text{„van erősen elérhetetlen számosság''}.$$

Mérhető számosságok létezésének egy másik fontos következményét Scott bizonyította még 1960-ban: ha van mérhető számosság, akkor nem minden halmaz konstruálható. Ezzel a mérhető számosságok létezése összeütközésbe kerül a konstruálhatósági axiómával, melyet Gödel arra használt, hogy bizonyítsa a kontinuum-hipotézis (relatív) konzisztenciáját. Ugyanakkor, mérhető számosságok létezése *nem* mond ellent a kontinuum-hipotézisnek, sőt úgy tűnik, hogy csupán nagy-számosság típusú axiómákkal nem lehet ellentmondani a kontinuum-hipotézisnek.

Ugyanakkor, van még egy mód, amivel a nagy-számosság axiómák új fényt vethetnek a kontinuum-hipotézisre. Ez lesz utolsó fejezetünk témája.

10. Projektív meghatározottság

Az 1920-as években lengyel matematikusok kezdeményezték bizonyos végtelen játékok vizsgálatát, ami aztán $\mathbb{R}$ részhalmazainak tanulmányozására új lehetőséget teremtett. Ezt a kutatási irányt sokáig csak kevesen ismerték és általában nem tartották fontosnak. 1925-ben Steinhaus a $[0,1]$ egységintervallum rögzített A részhalmazához a következő módon rendelt hozzá egy kétszemélyes G_A játékot. Két játékos, I és II felváltva választ a 0 és 1 számjegyek közül, összesen ω lépésben. A játék végére így kialakul egy (kettes számrendszerben felírt) x valós szám és I

nyer, ha $x \in A$, ellenkező esetben II nyer. Az A halmazt *meghatározottnak* nevezzük, ha valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája.

Például, ha A a $[0, 1]$-beli irracionális számok halmaza, akkor A meghatározott, mert I mindig nyer, ha a játék során általa választott számjegyek nem periodikus sorozatot alkotnak, mint például

$$101001000100001000001\ldots.$$

Ez valóban nyerő stratégia, mert a játék végére kialakuló x valós szám kettes számrendszerbeli alakja – II választásaitól függetlenül – nem lesz periodikus, ezért x biztosan irracionális szám lesz.

Ugyanakkor nem igaz, hogy $\mathbb{R}$ összes részhalmaza meghatározott – legalábbis ez a helyzet a kiválasztási axióma feltételezése mellett. Ellenpéldát Banach és Mazur talált, szintén 1925-ben. Az 1970-es évekig csak nagyon kevés halmazról volt ismert, hogy meghatározott, a meghatározottsággal kapcsolatos érdeklődést csak a halmazelmélet más fogalmaival való kapcsolata tartotta életben. Ennek a kapcsolatnak a formalizálása céljából Steinhaus és Mycielski 1962-ben a következő (AD-vel jelölt) axióma bevezetését javasolta: $\mathbb{R}$ *minden részhalmaza meghatározott.*

A halmazelmélet specialistái úgy vélik, hogy AD nehezen hihető, mert ellentmond a kiválasztási axiómának. Ugyanakkor AD nem mond ellent a ZF-axiómáknak és sok igen érdekes következménye van. 1964-ben Mycielski bizonyította, hogy

- $AD \Rightarrow \mathbb{R}$ minden részhalmaza Lebesgue-mérhető;
- $AD \Rightarrow$ gyenge kontinuum-hipotézis.

Továbbá, ha $\mathbb{R}$-nek nem is minden, de elég sok részhalmazáról tesszük föl, hogy meghatározott, akkor a kiválasztási axióma igazságát újra feltehetjük, viszont halmazok nagy osztályairól igazolhatjuk, hogy Lebesgue-mérhetők, valamint, hogy teljesül rájuk a gyenge kontinuum-hipotézis. Például, ha feltesszük a *projektív meghatározottságot* – vagyis azt, hogy minden projektív halmaz meghatározott – akkor igazolható, hogy minden projektív halmaz Lebesgue-mérhető és hogy minden nemmegszámlálható projektív halmaz számossága $2^{\aleph_0}$. Ez jelenti sok halmazelmélész számára az arany középutat: olyan világot, melyben a projektív halmazok jól viselkednek és a kiválasztási axióma is korlátlanul érvényes. Ezért az 1970-es és 1980-as években egyre égetőbbé vált a kérdés: vajon elfogadható-e a projektív meghatározottság?

Az 1970-es évek előtt csak annyi volt ismert, hogy a Borel-hierarchia első néhány szintjén lévő halmazok meghatározottak. 1975-ben D. A. Martin jelentős áttörést ért el azzal, hogy bebizonyította: az összes Borel-halmaz meghatározott. Ez a bizonyítás ZF teljes erejét kihasználta, de nem használt semmilyen nagy-számosság axiómát. Azok a bizonyítások viszont, melyek halmazok ennél nagyobb osztályairól igazolják, hogy meghatározottak (vagy legalább, hogy meghatározottságuk konzisztens módon *feltételezhető*) különböző nagy-számosság axiómákat használnak, s minél nagyobb a szóbanforgó halmazosztály, annál nagyobb nagy-számosság létezését kell garantálni.

Martin már 1970-ben bizonyította, hogy mérhető számosság létezéséből következik az analitikus halmazok meghatározottsága. 1987-ben Martin, Steel és Woodin megmutatta, hogy a projektív meghatározottság pontosan milyen nagy-számosság axiómával ekvikonzisztens. Az e jellemzésben szereplő számosságokat ma *Woodin-számosságoknak* nevezzük. Ezek nagyobbak a mérhető számosságoknál, de kisebbek, mint néhány más nagy-számosság, melyeket egyéb vizsgálatok során vezettek be. A Woodin-számosságok definíciója megtalálható Kanamori [4] könyvében, ami a nagy-számosságokról kitűnő áttekintést nyújt.

Az előző eredmények egyike sem válaszolta meg a kontinuum-problémát, de átalakították a halmazelmélet arculatát azáltal, hogy a projektív meghatározottsághoz hasonló új axiómák bevezetését eredményezték. Woodin nemrég írt egy 900 oldalas könyvet (és további könyvei vannak előkészületben), melyben elmagyarázza, hogy ezek az új axiómák miként tölthetik be a valós számok elméletében tátongó réseket úgy, hogy csak Gödel-mondatok és konzisztenciával kapcsolatos állítások maradjanak bizonyíthatatlanok. Speciálisan, ezekből az új axiómákból következik, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, ezért *a kontinuum-hipotézis hamis.*

A modern halmazelmélet technikailag rendkívül bonyolult, ezért kétségtelen, hogy sok időbe telhet, míg az átlag matematikus fel lesz készülve az új axiómák elfogadására, különösen, amíg ezek az új axiómák megfelelő módon meg sem fogalmazhatók egy ehhez hasonló terjedelmű cikkben. Mindazonáltal az a véleményem, hogy e fejlemények minden matematikus érdeklődésére számot tarthatnak, ezért arra bíztatom az olvasót, hogy tegye meg a következő lépést is és olvassa el Woodin [7]-ben publikált saját bevezetőjét programjához.

Hivatkozások

[1] D. J. Alberts, G. L. Alexanderson and C. Reid (szerkesztők), *More Mathematical People,* Academic Press (San Diego, 1990).

[2] P. Cohen, *Set Theoty and the Continuum Hypothesis,* W.A. Benjamin, Inc. (New York, 1966).

[3] S. Feferman et. al. (szerkesztők), *Kurt Gödel Collected Works,* vol. 2, Oxford University Press (New York, 1990).

[4] A. Kanamori, *The Higher Infinite,* Springer-Verlag (New York, 1994).

[5] A. Kanamori, The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen, *Bull. Symb. Logic,* **2** (1996), 1–71.

[6] G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origin, Developments, and Influence,* Springer-Verlag (New York, 1982).

[7] W. H. Woodin, *The Continuum Hypothesis, Parts I and II,* Notices Amer. Math. Soc., vol. 48 (2001), pp. 567–576, pp. 681–690.

John Stillwell: The continuum problem

This is the Hungarian translation of an article of John Stillwell. The paper surveys the history of the continuum problem from its origin till recent research directions. It also provides a brief introduction to some classical topics of set theory like measure, descriptive set theory, independence results and large cardinal axioms.

AZ 1996. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY FELADATAINAK MEGOLDÁSA*

SZABÓ ENDRE

1. feladat (*Juhász István*). Legyen X egy κ súlyú kompakt T_2 tér. Bizonyítandó, hogy minden $\omega \leq \lambda < \kappa$-ra van X-nek λ súlyú T_2 folytonos képe. (Egy X tér súlya az a legkisebb végtelen számosság, melyre van X-nek legfeljebb ilyen számosságú bázisa.)

Megoldás (*Harcos Gergely*). Jelölje I a $[0,1]$ intervallumot a szokásos topológiájával. Ismeretes, hogy X beágyazható az I^κ Tyhonov-kockába. Tetszőleges $S \subseteq \kappa$ részhalmaz esetén jelölje pr_S az I^κ Tyhonov-kocka vetítését az I^S faktorra. Ez folytonos, és az X tér bázisát alkotják az $X \bigcap \mathrm{pr}_S^{-1}(G)$ alakú halmazok, ahol $S \subseteq \kappa$ véges részhalmaz, és G az I^S egy racionális sugarú nyílt gömbje. Az a célunk, hogy megmutassuk, hogy megfelelően választott T részhalmazra a $\mathrm{pr}_T(X)$ vetület súlya tetszőleges κ számosságnál kisebb értéket felvehet.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk minden $\mu \in \kappa$ rendszámra az X tér egy X_μ vetületét, és egy $S_\mu \subseteq \kappa$ véges részhalmazt a következőképpen. Ha $\mu \in \kappa$ tetszőleges rendszám, és az S_ν halmazokat már definiáltuk minden $\nu \in \mu$ esetén, akkor legyen

$$T_\mu = \bigcup_{\nu \in \mu} S\nu$$

és

$$X_\mu = \mathrm{pr}_{T_\mu}(X) \subseteq I^{T_\mu}.$$

Az I^μ tér súlya $|\mu|$, azért az X_μ altér súlya is legfeljebb $|\mu|$. Mivel az X tér súlya nagyobb μ-nél, azért van olyan nyílt halmaza, amelyik nem áll elő X_μ-beli nyílt halmaz ősképeként. Ezért van olyan $S \subseteq \kappa$ véges részhalmaz, és $G \subseteq I^S$ gömb, amelyekre $X \bigcap \mathrm{pr}_S^{-1}(G)$ nem áll elő X_μ-beli nyílt halmaz ősképeként. Válasszunk S_μ-nek egy ilyen S részhalmazt.

*A versenyről szóló jelentés a Matematikai Lapok 1996/3-4. számában jelent meg.

Ezzel minden $\mu \in \kappa$ rendszámra definiáltuk az $S_\mu, T_\mu \subseteq \kappa$ részhalmazokat, és az X tér $X\mu$ vetületét. Világos, hogy a T_μ egy monoton növekvő halmaz-sorozat, és

$$|T_\mu| = |\mu|$$

teljesül minden végtelen μ rendszámra.

Most pedig megmutatjuk, hogy ha $\omega \leq \lambda < \kappa$ tetszőleges reguláris számosság, akkor az X_λ tér súlya legalább $|\lambda|$. A fentiekkel együtt ez igazolni fogja a feladat állítását. Indirekt módon tegyük fel, hogy az X_λ térnek van egy λ-nál kisebb számosságú $\mathcal{B}$ bázisa. Legyenek $A, B \in \mathcal{B}$ olyan báziselemek, amelyekre $\overline{A} \subseteq B$. Ekkor minden $p \in \overline{A}$ ponthoz találunk olyan $S \subset T_\lambda$ véges részhalmazt és $G \subseteq I^S$ nyílt halmazt, amelyre a G ősképe X_λ-ban tartalmazza p-t, és benne van B-ben. A kompaktság miatt véges sok ilyen őskép uniója lefedi $\overline{A}$-t, tehát választható S és G úgy, hogy a G ősképe tartalmazza az egész $\overline{A}$-t, és benne van B-ben. Könnyen látható, hogy ha minden A, B párra elvégezzük ezt a konstrukciót, akkor az így kapott ősképek együttvéve bázist alkotnak X_λ-ban. Legyen $T \subset T_\lambda$ ezen S halmazok uniója. A konstrukcióból következik, hogy az $X_\lambda \to \mathrm{pr}_T(X)$ vetítés homeomorfizmus. A feltételek szerint $|T| < |\lambda|$, λ reguláris, és $T_\lambda = \bigcup_{\mu \in \lambda} T_\mu$, tehát $T \subseteq T_\mu$ valamelyik $\mu < \lambda$-ra. Ebből következik, hogy az $X_\lambda \to X_\mu$ projekció is homeomorfizmus, ami ellene mond az S_μ konstrukciójának.

Eddig beláttuk, hogy X_λ súlya legfeljebb $|\lambda|$, és ha λ reguláris számosság, akkor a súly egyenlő λ-val. Mivel az X_μ tér az X_λ tér folytonos képe (vetülete) minden $\mu \leq \lambda$ rendszámpárra, azért az X_λ tér súlya monoton növekvő függvénye a λ-nak. Ezért minden λ rendszámra teljesül, hogy X_λ súlya pontosan $|\lambda|$. A feladat állítását megmutattuk.

2. feladat (*Károlyi Gyula, Pach János, Tóth Géza*). Egy teljes gráf csúcsai úgy helyezkednek el a síkban, hogy közülük semelyik három nincs egy egyenesen. A gráf éleit, melyek a csúcsokat összekötő egyenes szakaszok, megszíneztük két színnel. Bizonyítandó, hogy létezik azonos színű élekből álló, önmagát nem metsző feszítőfa.

Megoldás (*Goldman Júlia*). Indirekt bizonyítást adunk, a csúcsok száma szerinti teljes indukcióval. 1 és 2 csúcsú gráfokra láthatóan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy G egy n csúcsú teljes gráf, amit úgy színeztünk ki kékkel és pirossal, hogy nincs benne egyszínű, önmagát nem metsző feszítőfa, és tegyük fel, hogy n-nél kevesebb csúcsú gráfokra igaz a feladat állítása.

A konvex burok élei egyforma színűek, mondjuk kékek. Ha ugyanis a konvex burok egyik csúcsából két különböző él indul ki, akkor a többi csúcs által kifeszített $n-1$ csúcsú gráfnak van egyszínű feszítőfája, és a kimaradó csúcs a konvex burok mentén valamelyik irányban ugyanilyen színnel csatlakoztatható a fához, ami ellene mond a feltételeinknek.

Válasszunk egy irányt, amelyik különbözik a gráf éleinek irányától, és ebből az irányból vetítsük le a gráf csúcsait egy egyenesre. A vetületek sorrendje szerint beszámozzuk a gráf csúcsait: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Világos, hogy v_1 és v_n a konvex burokhoz tartoznak. Minden $1 \leq i < j \leq n$-re $G[i, j]$ fogja jelölni a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ csúcsok által feszített részgráfot.

Minden $1 < i < n$-re a $G[1, i]$ és a $G[i, n]$ gráfokban van feszítőfa, és ez a két feszítőfa nem lehet azonos színű. Hiszen ha egyforma színük lenne, akkor az uniójuk egyszínű feszítőfa volna G-ben.

A $G[1, n-1]$ valamint a $G[2, n]$ gráfok egyszínű feszítőfája piros. Ha ugyanis kék volna, akkor a kimaradó v_n illetve v_1 csúcsokat a konvex burok mentén kék éllel hozzácsatlakoztatva az egész G gráf kék színű feszítőfáját kapnánk, az pedig lehetetlen. Az előző észrevétellel összevetve azt tapasztaljuk, hogy a $G[1, 2]$ gráf feszítőfája kék színű.

Láttuk tehát, hogy a $G[1, 2]$ illetve a $G[1, n-1]$ gráfok feszítőfája kék illetve piros. Ezért van olyan i, hogy a $G[1, i]$ gráf feszítőfája kék, de a $G[1, i+1]$ gráfé már piros. Ebből persze következik, hogy a $G[i+1, n]$ gráf feszítőfája szintén kék. Ezt a két kék fát a konvex burok mentén egy kék éllel összekapcsolva a teljes G gráf kék feszítőfáját kapjuk. Ez ellene mond a kiindulási feltételeknek, így a feladat állítását bebizonyítottuk.

3. feladat (*Károlyi Gyula*). Legyenek $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n} \leq 4n-2$ egész számok, összegük páros. Bizonyítandó, hogy minden elég nagy n-re létezik $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n} = \pm 1$ úgy, hogy

$$\sum \varepsilon_i = \sum \varepsilon_i a_i = 0.$$

Megoldás (*Szegedy Balázs*). A megoldás során az adott számokat párokba rendezzük, majd a párok különbségeit tetszőlegesen előjelezve összeadjuk. Világos, hogy egy ilyen konstrukcióban ugyanannyi szám szerepel pozitív és negatív előjellel, tehát az előjelek összege automatikusan nulla. Arra kell csak vigyáznunk, hogy a végeredmény abszolút értéke minél kisebb legyen. A megoldás során sokszor alkalmazzuk a következő észrevételt:

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egész számok, jelölje M az abszolút értékük maximumát. Legyen K egy olyan egész szám, aminek az abszolút értéke legfeljebb $M + \sum_{i=1}^{m} |x_i|$. Ekkor választható olyan $\varepsilon_i = \pm 1$ előjelezés, hogy a $\left(K + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i\right)$ összeg abszolút értéke legfeljebb M. Ez az észrevétel könnyen belátható: egymás után választjuk meg az ε_j előjeleket, mindegyiket az előző $\left(K + \sum_{i<j} \varepsilon_i x_i\right)$ részletösszeg előjelének ellenkezőjére. Ezzel elérjük, hogy a a részletösszegek abszolút értéke egyre kisebb, mindaddig, amíg előjelet nem vált. Ha már egyszer előjelet váltott, akkor minden további lépésben legfeljebb M marad a részletösszeg. Ha pedig nem volt egyetlen előjelváltás sem, akkor a végösszeg abszolút értéke $\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|\right)$-vel kisebb $|K|$-nál, tehát megint csak legfeljebb M lehet.

Most elkezdjük a párok kiválogatását. Először választunk egy olyan (s, t) párt az a_i-k közül, amelyek különbsége egy. A feltétel garantálja, hogy ilyen pár létezik. Ezután olyan $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots$ párokat választunk a megmaradt a_i számokból, amelyek különbsége legfeljebb kettő. Könnyen látható, hogy ha sorban egymás után válogatjuk ki ezeket a párokat, akkor mindaddig folytathatjuk a válogatást, ameddig a maradék a_i-k sűrűsége az $[1, 4n-2]$ intervallumban nagyobb, mint egyharmad, azaz legalább $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1$ párt kiválaszthatunk. Az egyszerűség kedvéért addig folytatjuk, amíg $n/4$ pár összegyűlik, ez elég nagy n esetén lehetséges.

Eddig kevesebb, mint $n/3$ párt választottunk ki, tehát marad még legalább $4n/3$ számunk. Az $[1, 4n-2]$ intervallumot 20 részre osztjuk úgy, hogy minden rész hossza legfeljebb

$n/4$ legyen. Valamelyik részbe több, mint $n/15$ szám került. Most ezek közül válogatjuk ki az $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ párokat. Világos, hogy minden pár különbsége legfeljebb $n/4$, most az a célunk, hogy a különbségek abszolút értékeinek összege mennél nagyobb legyen. Megint egymás után válogatjuk ki a párokat, mindig a két szélső számot választjuk (hogy maximális legyen a különbség). Tehát a legelső különbség: $|y_1 - x_1| \geq n/15$ (mert ennél több számunk van), a második: $|y_2 - x_2| \geq n/15 - 2$ (mert még mindig maradt ennél több számunk), és általában: $|y_j - x_j| \geq n/15 - 2j$. Legalább $n/30$ párt kiválaszthatunk, így az abszolút értékek összege nagyobb, mint $n^2/900$. Ha n elég nagy, akkor $n^2/900 \geq 4n$, tehát mi feltételezzük, hogy az összeg legalább $4n$.

Az ezután fennmaradó számokat tetszőleges módon párosítjuk, így kapjuk a (z_1, t_1), $(z_2, t_2), \ldots$ párokat. Világos, hogy minden pár különbsége kisebb $4n$-nél. Ezzel az összes számunkat besoroltuk valamelyik csoportba, hátra van még a párok előjeleinek kiosztása. Kezdjük a (z_j, t_j) párokkal. A kezdeti észrevételünk alapján találhatunk olyan $e_j = \pm 1$ előjeleket, amelyekkel

$$\left| \sum_j e_j (t_j - z_j) \right| \leq \max_j |t_j - z_j| < 4n.$$

Az (x_j, y_j) párokra is ugyanazt az észrevételünket használjuk, most a $K = \left| \sum_j e_j (t_j - z_j) \right|$ konstanssal. Tehát vannak olyan $f_j = \pm 1$ előjelek, amelyekkel

$$\left| \left(\sum_j e_j (t_j - z_j) \right) + \sum_j f_j (y_j - x_j) \right| \leq \max_j |y_j - x_j| \leq \frac{n}{4}.$$

Az (u_j, v_j) párok $g_j = \pm 1$ előjeleit megint csak az észrevételünk alapján választjuk meg úgy, hogy

$$\left| \left(\sum_j e_j (t_j - z_j) + \sum_j f_j (y_j - x_j) \right) + \sum_j g_j (v_j - u_j) \right| \leq \max_j |v_j - u_j| \leq 2.$$

Végül a $t - s = 1$ különbség h előjelét úgy választjuk meg, (szintén az észrevételünk alapján), hogy a teljes előjeles összeg abszolút értéke legfeljebb 1 legyen:

$$\left| h(t - s) + \left(\sum_j e_j (t_j - z_j) + \sum_j f_j (y_j - x_j) + \sum_j g_j (v_j - u_j) \right) \right| \leq 1.$$

Azonban az a_i számok összege páros, tehát ez az előjeles összeg is páros kell legyen. Abból viszont következik, hogy az összeg 0. A kívánt előjeleket megkonstruáltuk.

4. feladat (*Pyber László*). Bizonyítandó, hogy egy G véges csoportban az n indexű részcsoportok száma legfeljebb $|G|^{2 \log_2 n}$.

I. megoldás (*Szegedy Balázs*). Először belátjuk, hogy a G véges csoport rendezett $\lfloor \log_2 |G| \rfloor$-elemű generátorrendszereinek száma legalább $\left(\frac{|G|}{2} \right)^{\lfloor \log_2 |G| \rfloor}$. Legyen H a következő rendezett elem-$\lfloor \log_2 |G| \rfloor$-esek halmaza.

$h = \left(h_1, \ldots, h_{\lfloor \log_2 |G| \rfloor}\right) \in H$ pontosan akkor, ha:

$$h_1 \neq 1 \quad \text{és}$$
$$\langle h_1, \ldots, h_i \rangle \neq G \quad \text{esetén} \quad h_{i+1} \notin \langle h_1, \ldots, h_i \rangle.$$

Világos, hogy $|H| \geq \left(\frac{|G|}{2}\right)^{\lfloor \log_2 |G| \rfloor}$, hiszen ha sorban egymás után válogatjuk egy ilyen sorozat elemeit, akkor minden lépésben legalább $\left(\frac{|G|}{2}\right)$-féle választási lehetőségünk van. Válasszunk egy $h \in H$ sorozatot. Ha valamelyik i-re a $\langle h_1, \ldots, h_i \rangle$ részcsoport még nem a teljes G, akkor a $\langle h_1, \ldots, h_{i+1} \rangle$ részcsoport nagyobb nála, tehát legalább kétszer annyi eleme van. Ezért $|\langle h_1, \ldots, h_i \rangle| \geq \min\left(|G|, 2^i\right)$ minden i-re. Így $|\langle h \rangle| \geq \min\left(|G|, 2^{\lfloor \log_2 |G| \rfloor}\right) > \frac{|G|}{2}$. Mivel az indexe kisebb kettőnél, azért $\langle h \rangle$ egyenlő az egész G csoporttal. Tehát H minden eleme generátorrendszer, és ezzel bebizonyítottuk a generátorrendszerek számára vonatkozó becslésünket.

A becslésünk szerint a $\lfloor \log_2 |G| \rfloor$ hosszúságú G-beli sorozatok közül minden n indexű részcsoportot legalább $\left(\frac{|G|}{2n}\right)^{\lfloor \log_2 \frac{|G|}{n} \rfloor}$ sorozat generál. Tehát az n indexű részcsoportok száma legfeljebb

$$\frac{|G|^{\lfloor \log_2 \frac{|G|}{n} \rfloor}}{\left(\frac{|G|}{2n}\right)^{\lfloor \log_2 \frac{|G|}{n} \rfloor}} = (2n)^{\lfloor \log_2 \frac{|G|}{n} \rfloor} \leq (2n)^{\log_2 \frac{|G|}{n}} = \left(\frac{|G|}{n}\right)^{\log_2 2n},$$

ami jobb becslés, mint a kívánt $|G|^{2 \log_2 n}$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

II. megoldás (*Csörnyei Marianna*). Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges G véges csoportra és $H \leq G$ részcsoportra legfeljebb $\left(\frac{|G:H|}{n}\right)^{\log_2 2n}$ darab olyan n-indexű M részcsoportja van G-nek, amelyik tartalmazza a H részcsoportot. Ebből $H = 1$ esetén következik a feladat állítása, sőt, a kívántnál jobb becslést kapunk.

Az állítást $|G : H|$ szerinti teljes indukcióval fogjuk bizonyítani. Tehát az indukciós feltevés: minden $|G : H|$-nál kisebb indexű részcsoportra igaz az állítás. Ha a $|G : H|$ index nem osztható n-nel, akkor nincs G és H között n indexű részcsoport, és a becslés triviálisan teljesül. $|G : H| = n$ esetén $H = M$ az egyetlen H-t tartalmazó n indexű részcsoport, és $\left(\frac{|G:H|}{n}\right)^{\log_2 2n} = 1$, tehát igaz a becslés. Tehát az állítás igaz, ha a H indexe kisebb $2n$-nél. A továbbiakban feltesszük, hogy $|G : H| \geq 2n$.

Legyenek $H1, Hx_1, Hx_2, \ldots, Hx_m$ a H részcsoport jobboldali mellékosztályai (tehát $m = |G : H| - 1$). Ezek közül a keresett M csoportok $|M : H| = \frac{|G:H|}{|G:M|} = \frac{|G:H|}{n}$ mellékosztályt tartalmaznak, tehát minden ilyen részcsoport $\frac{|G:H|}{n} - 1$ elemet tartalmaz $x_1, x_2, \ldots, x_m$ közül (hiszen a $H1$ mellékosztály mindegyikben benne van).

Jelölje m_i azon n indexű részcsoportok számát, amelyek a H részcsoporton felül még tartalmazzák az x_i elemet is. Láttuk, hogy a keresett M részcsoportok mindegyike ugyanannyi x_i elemet tartalmaz, ezért az ilyen M-ek száma éppen

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} m_i}{\{x_i\text{-k száma } M\text{-ben}\}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i}{\frac{|G:H|}{n} - 1}.$$

Ha egy ilyen M részcsoport tartalmazza az x_i elemet, akkor tartalmazza az egész $\langle H, x_i \rangle$ részcsoportot is. Mivel a $\langle H, x_i \rangle$ részcsoport nagyobb H-nál, azért az indexe legfeljebb $|G : H|/2$, és alkalmazhatjuk rá az indukciós feltevést. Tehát

$$m_i \le \left(\frac{|G : \langle H, x_i \rangle|}{n} \right)^{\log_2 2n} \le \left(\frac{|G : H|}{2n} \right)^{\log_2 2n} = \frac{1}{2n} \left(\frac{|G : H|}{n} \right)^{\log_2 2n}.$$

Vagyis az összes ilyen M részcsoportok száma:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} m_i}{\frac{|G:H|}{n} - 1} \le \frac{m \frac{1}{2n} \left(\frac{|G:H|}{n} \right)^{\log_2 2n}}{\frac{|G:H|}{n} - 1} = \frac{|G : H| - 1}{2|G : H| - 2n} \left(\frac{|G : H|}{n} \right)^{\log_2 2n} =$$

$$= \left(1 - \frac{|G : H| - 2n + 1}{2|G : H| - 2n} \right) \left(\frac{|G : H|}{n} \right)^{\log_2 2n}.$$

Ebből már következik a kívánt becslés, hiszen $|G : H| \ge 2n$, tehát az

$$\left(1 - \frac{|G : H| - 2n + 1}{2|G : H| - 2n} \right)$$

tényező nem lehet nagyobb 1-nél. Az indukciós lépést beláttuk, tehát a kívánt becslést bebizonyítottuk.

5. feladat (*Benkő Dávid*). Létezik-e a szigorúan pozitív tagú konvergens sorok K halmaza és a szigorúan pozitív tagú divergens sorok D halmaza között olyan bijekció, hogy tetszőleges K-beli $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok és a nekik megfelelő $\sum a'_n$ és $\sum b'_n$ D-beli sorok esetén $a_n/b_n \to 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a'_n/b'_n \to \infty$?

Megoldás (*Csörnyei Marianna*). Indirekt módon bizonyítjuk, hogy nincs ilyen bijekció. Tegyük fel, hogy mégis van egy a feltételeknek eleget tevő bijekciónk. Definiáljuk a következő sorozatokat:

$$a'_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1/2^n & \text{ha páratlan,} \end{cases} \qquad b'_n = \begin{cases} 1/2^n & \text{ha } n \text{ páros} \\ n & \text{ha páratlan.} \end{cases}$$

Ezek divergens sorok, jelölje $\sum a_n$ illetve $\sum b_n$ a feltételezett bijekció során hozzájuk rendelt konvergens sorokat. Legyen $n_0 = 0$, és $k > 0$-ra legyen n_k a legkisebb olyan index, amelyre

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} a_n < \frac{1}{4^k} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=n_k}^{\infty} b_n < \frac{1}{4^k}$$

teljesül. Definiáljuk a c_n sort úgy, hogy minden $n_k \le n < n_{k+1}$ esetén

$$c_n = 2^k(a_n + b_n)$$

Ekkor

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} 2^k(a_n + b_n) < \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{\infty} 2^k(a_n + b_n) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{2}{4^k} = 2.$$

Tehát a $\sum c_n$ sor konvergens, így a feltételezett bijekció hozzárendel egy $\sum c'_n$ divergens sort. Másrészt viszont $n_k \le n < n_{k+1}$ esetén $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{2^k(a_n + b_n)} < \frac{1}{2^k}$, tehát $a_n/c_n \to 0$, és hasonlóképpen $b_n/c_n \to 0$. A feltételek szerint tehát $a'_n/c'_n \to \infty$ és $b'_n/c'_n \to \infty$, és így elég nagy n-re $c'_n < \min(a'_n, b'_n) = 1/2^n$. Ez azonban ellene mond a $\sum c'_n$ sor divergenciájának. Az indirekt feltevésünk ellentmondásra vezetett, tehát beláttuk, hogy nincs ilyen tulajdonságú bijekció.

6. feladat (*Totik Vilmos*). Legyen $\{a_n\}$ korlátos valós sorozat.

a) Igazoljuk, hogy ha X a számegyenes pozitív mértékű részhalmaza, akkor majdnem minden $x \in X$-re van olyan $\{y_n\}$ részsorozata X-nek, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(n(y_n - x) - a_n\big) = 1.$$

b) Mutassunk olyan nem korlátos $\{a_n\}$ sorozatot, amelyre szintén igaz az előbbi állítás.

Megoldás (*Csörnyei Marianna*). A megoldás során λ-val jelöljük a számegyenesen a Lebesgue-mértéket. Először egy lemmát bizonyítunk:

Lemma. *Legyen $\{a_n\}$ tetszőleges valós számsorozat, X a számegyenes egy pozitív mértékű részhalmaza, $x \in X$ egy rögzített elem, $\{\delta_n\}$ egy valós számsorozat és $n_0 \in N$ index, amelyekre a következők teljesülnek:*

$$\delta_n \ge 0, \quad \delta_n \to 0 \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty$$

$$\forall n \ge n_0\text{-ra} \qquad X \bigcap \left[x + \frac{a_n + \delta_n}{n}, x + \frac{a_n + 2\delta_n}{n}\right] \ne \emptyset$$

$$\forall n \ge n_0\text{-ra} \qquad X \bigcap \left[x + \frac{a_n - 2\delta_n}{n}, x + \frac{a_n - \delta_n}{n}\right] \ne \emptyset.$$

Ekkor található olyan $\{y_n\}$ részsorozata X-nek, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} \big(n(y_n - x) - a_n\big) = 1$ teljesül.

Lemma bizonyítása. A bizonyítás során c_n-nel jelöljük a $c_n = n(y_n - x) - a_n$ értéket. Teljes indukcióval definiáljuk az $\{y_n\}$ sorozatot. Ha $n < n_0$, akkor y_n tetszőlegesen választható. Legyen tehát $n \geq n_0$, és feltesszük, hogy $i < n$-re már definiáltuk az y_i és a c_i számokat. Két esetet különböztetünk meg.

Az első esetben $\sum\limits_{i<n} c_i < 1$. Ekkor válasszuk az y_n számot az

$$X \bigcap \left[x + \frac{a_n - 2\delta_n}{n}, x + \frac{a_n - \delta_n}{n}\right]$$

halmazból, a feltételeink miatt ez nem üres. Látható, hogy $c_n \in [\delta_n, 2\delta_n]$, tehát pozitív.

A másik esetben $\sum\limits_{i<n} c_i \geq 1$. Ekkor pedig válasszuk az y_n értéket a

$$X \bigcap \left[x + \frac{a_n + \delta_n}{n}, x + \frac{a_n + 2\delta_n}{n}\right]$$

halmazból, tehát $c_n \in [-2\delta_n, -\delta_n]$, azaz negatív.

Ezzel definiáltuk az $\{y_n\}$ és $\{c_n\}$ számsorozatokat. Tekintsük a $\left\{\sum\limits_{i\leq n} c_i\right\}$ sorozatot. Ha ennek valamelyik tagja 1-nél kisebb, akkor a következő tag legalább δ_n-nel nagyobb lesz nála, tehát a sorozatban előre haladva egyre közeledünk az 1 felé, és előbb-utóbb egynél nagyobb taghoz jutunk (itt használjuk a $\sum \delta_n$ sor divergenciáját). Ha pedig valamelyik tag legalább 1, akkor a következő tag legalább δ_n-nel kisebb nála, tehát előre haladva előbb-utóbb megint csak egynél kisebb taghoz jutunk. Mivel $|c_n| \leq 2\delta_n \to 0$, azért a $\sum c_n$ sor konvergens, és az összege 1. Ezzel beláttuk a lemmát.

Feladat a) része. Egy mérhető halmaz majdnem minden pontja sűrűségi pont. Azt fogjuk belátni, hogy ha $x \in X$ sűrűségi pont, akkor találunk olyan δ_n sorozatot, amelyik kielégíti a lemma feltételeit.

Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos, mondjuk $|a_n| < K$ minden n-re. Legyen $x \in X$ egy sűrűségi pont, B_n-nel jelöljük az x pont $\dfrac{K+4}{n}$ sugarú környezetét, és legyen $\rho_n = n\lambda(B_n \setminus X)$. Mivel x sűrűségi pont, azért $\rho_n \to 0$. Legyen $\delta_n = \rho_n + 1/n$. Világos, hogy $0 < \delta_n \leq 2$, $\delta_n \to 0$, és $\sum \delta_n = \infty$, tehát csak a lemma utolsó két feltételét kell ellenőriznünk. De a feltételekben szereplő intervallumok hossza $\delta_n/n > \rho_n/n$, és $\delta_n \leq 2$ miatt benne vannak a B_n környezetben, tehát van az $X \bigcap B_n$-nel közös pontjuk (hiszen $\lambda(B_n \setminus X) = \rho_n/n$). Ezzel a feladat a) részét beláttuk.

Feladat b) része. Legyen $n_k = 2^{2^k}$, $a_{n_k} = k$ minden pozitív k-ra, és minden más indexre legyen $a_n = 0$. Ez a sorozat nem korlátos, de belátjuk, hogy mégis teljesülnek rá a lemma feltételei. A δ_n sorozatot úgy választjuk, hogy $\delta_{n_k} = 1/k$, és minden más indexre $\delta_n = 0$. Ez az első feltételt kielégíti, és az n_k indexektől különböző n indexekre a másik két feltétel is automatikusan teljesül, hiszen x benne van mindkét szóbanforgó intervallumban. Tehát csak a második és a harmadik feltételt kell belátnunk, és csak az n_k indexekkel foglalkozunk. Elegendő korlátos X halmazokra belátni a két feltételt, abból már következik az általános eset is. Legyen tehát $X \subseteq [-K, K]$ egy pozitív mértékű részhalmaz, és minden $x \in X$ számhoz hozzárendeljük a következő (x-től függő) intervallumokat:

$$I_k = \left[x + \frac{k + 1/k}{n_k}, x + \frac{k + 2/k}{n_k}\right]$$

és

$$J_k = \left[x + \frac{k - 2/k}{n_k}, x + \frac{k - 1/k}{n_k}\right]$$

Világos, $\frac{k + 2/k}{n_k} < 1$, tehát mindegyikük teljes egészében benne van az $I = [-K-1, K+1]$ intervallumban. Az I_k és J_k intervallumok hossza $\frac{1}{kn_k}$. Most k szerinti teljes indukcióval definiáljuk az I páronként diszjunkt részintervallumainak egy rendszerét. Minden k-ra kiválasztjuk I-nek $\frac{1}{kn_k}$ hosszúságú, X-től, egymástól és az eddig már kiválasztott intervallumoktól diszjunkt részintervallumainak egy maximális rendszerét. Jelölje $E_1, E_2, \dots$ az így kiválasztott intervallumokat. Mivel diszjunktak, azért a hosszúságuk összege legfeljebb $2K + 2$.

Választunk egy E_i-t, a hossza mondjuk $\frac{1}{k2^k}$. Azon x számok, amelyekhez tartozó I_k illetve J_k intervallum metszi az E_i intervallumot, egy-egy $\lambda(E_i) + \lambda(I_k) = 2\lambda(E_i)$ hosszúságú intervallumban helyezkednek el. Az olyan x-ek pedig, amelyekhez tartozó I_l vagy J_l intervallum valamilyen $l > k$-ra metszi az E_i intervallumot, mindannyian legfeljebb $\frac{k+1+\frac{2}{k+1}}{n_{k+1}}$ távolságra vannak az E_i intervallumtól. Mivel

$$\frac{k+1+\frac{2}{k+1}}{n_{k+1}} = \frac{(k+1)^2+2}{(k+1)n_k^2} < \frac{(k+1)^2+2}{2n_k}\left(\frac{2}{kn_k}\right) < \frac{2}{kn_k} = \lambda(E_i),$$

azért az összes ilyen x szám benne van egy $3\lambda(E_i)$ hosszúságú intervallumban. Jelölje A_i mindazon $x \in X$ számok halmazát, amelyekhez tartozó I_l vagy J_l intervallum metszi E_i-t valamilyen $l \geq k$ indexre. Világos, hogy A_i mérhető, és az imént láttuk, hogy $\lambda(A_i) \leq 7\lambda(E_i)$. Tehát

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 7\lambda(E_i) \leq 14K + 14$$

Mivel ez az összeg véges, azért egy nullmértékű részhalmaztól eltekintve minden $x \in X$ csak véges sok A_i halmazban szerepel. Legyen most $x \in X$ egy olyan szám, amelyik csak véges sok A_i halmazban szerepel, belátjuk, hogy teljesülnek rá a lemma feltételei. Legyen i_0 a legnagyobb olyan index, amire még $x \in A_{i_0}$.

Válasszunk egy l indexet. Az E_i intervallumok konstrukciójakor az indukció l-edik lépése után az I_l és a J_l intervallumokkal már nem bővíthető az E_i-k rendszere (hiszen maximális). Ez kétféle módon következhet be: az I_l és a J_l intervallumok vagy az X halmazt metszik, vagy valamelyik $\frac{1}{ln_l}$-nél nem rövidebb E_i intervallumot.

Tegyük fel, hogy a második mód következik be, tehát az I_l vagy a J_l intervallum metsz egy $\frac{1}{ln_l}$-nél nem rövidebb E_i intervallumot. Világos, hogy ilyenkor $x \in A_i$, tehát az I_l

intervallum metszi az $E_1, E_2, \ldots, E_{i_0}$ intervallumok valamelyikét. Ez csak úgy lehetséges, ha $\frac{l+2/2}{n_l}$ legfeljebb akkora, mint az x távolsága az $\bigcup_{j<i_0} E_j$ zárt halmaztól. Ez ad egy felső korlátot az ilyen l indexre, az ennél nagyobb indexekre már mind az I_l, mind a J_l intervallum az X halmazt metszi. Ezzel beláttuk a lemma két hiányzó feltételét, és ezzel a feladat b) részét is megoldottuk.

7. feladat (*Halász Gábor* és *Szegő Gábor*). Konstruáljunk olyan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| < 1),$$

az egységkörben reguláris függvényt, amely egy pont kivételével az egységkörvonal minden pontján át analitikusan folytatható, és amelyre az $\{a_n\}$ sorozatnak két torlódási pontja van, a ∞ és egy véges érték.

Megoldás (*Halász Gábor*). Legyen $F(s)$ minimáltípusú egészfüggvény, azaz minden rögzített $\varepsilon > 0$ valós számra $|F(s)| \le e^{\varepsilon|s|}$ teljesül minden elég nagy s értékre (tehát $|s| \ge r_0(\varepsilon)$ esetén).

Ismeretes – a megoldás végén adunk rá bizonyítást, – hogy $a_n = F(n)$ esetén $f(z)$ a kívánt analitikus tulajdonságú. Konstruálunk alkalmas $F(s)$ függvényt:

$$F(s) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{2^m}\right)$$

(Itt 2^m helyett akármilyen, kellően ritka, pozitív egész számokból álló sorozat megtenné.) Ez az $F(s)$ minimáltípusú, sőt, nulladrendű függvény. Világos, hogy $a_{2^m} = F(2^m) = 0$. Másrészt megmutatjuk, hogy $a_n = F(n) \to \infty$ amint $n \to \infty$, $n \ne 2^m$. Tehát az így konstruált $f(z)$ függvény rendelkezik az összes előírt jótulajdonsággal.

Legyen M az (egyik) $\log_2 n$-hez legközelebbi egész szám, azaz

$$|M - \log_2 n| = \min_m |m - \log_2 n| \le \frac{1}{2}.$$

Ekkor $m \ne M$ esetén $|m - \log_2 n| \ge \frac{1}{2}$, azaz $m > M$ esetén $\frac{n}{2^m} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $m < M$ esetén $\frac{n}{2^m} \ge \sqrt{2}$. $m > M$ esetén tehát

$$\left(1 - \frac{n}{2^m}\right) \ge e^{-c\frac{n}{2^m}},$$

$$\prod_{m>M} \left(1 - \frac{n}{2^m}\right) \ge e^{-cn\sum_{m>M}\frac{1}{2^m}} = e^{-\frac{cn}{2^M}} \ge e^{-c\sqrt{2}}.$$

$m < M - 1$ esetén durván

$$\left|1 - \frac{n}{2^m}\right| = \left|\frac{n}{2^m} - 1\right| \ge 2\sqrt{2} - 1 > 1,$$

míg $m = M - 1$ esetén

$$\left|1 - \frac{n}{2^m}\right| = \left|\frac{n}{2^m} - 1\right| \geq \sqrt{2} - 1,$$

tehát az $m = 0$ és $m = 1$ tagokat különvéve azt kapjuk, hogy

$$\left|\prod_{m=0}^{M-1}\left(1 - \frac{n}{2^m}\right)\right| \geq (n-1)\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

$m = M$ esetén

$$\left|1 - \frac{n}{2^m}\right| = \frac{|n - 2^M|}{2^M} \geq \frac{1}{2^M} \geq \frac{1}{\sqrt{2}n},$$

hiszen $n \neq 2^M$. Összefoglalva:

$$|F(n)| \geq e^{-c\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1\right)(n-1)\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}n} \to \infty,$$

amint igazolni kellett.

Hátra van még az analitikus folytathatóság ígért bizonyítása. Ha $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$ minimáltípusú, akkor minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $K(\varepsilon)$ konstans, amelyre $|c_k| \leq K(\varepsilon)\frac{\varepsilon^k}{k!}$ teljesül minden k indexre. $|z| < 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_k n^k z^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n.$$

Ha $z = e^w$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{nw} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{nw}\right)^{(k)} = \left(\frac{1}{1 - e^w}\right)^{(k)}$$

a $\Re e(w) < 0$ félsíkban. $\frac{1}{1 - e^w}$ azonban az egész síkon periodikus, és reguláris kivéve a $2l\pi i$ pontokat (l egész szám). Minden ezektől különböző w_0 komplex számnak egy kis $\delta(w_0)$ sugarú környezetében reguláris, és van egy $C(w_0)$ felső korlátja. Tehát a Cauchy becslés szerint ebben a környezetben minden k-ra

$$\left|\left(\frac{1}{1 - e^w}\right)^{(k)}\right| \leq \frac{C(w_0) k!}{\delta(w_0)^k}$$

teljesül. Ezért ha $\varepsilon < \delta(w_0)$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot \left|\sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{nw}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} K(\varepsilon)\frac{\varepsilon^k}{k!} \cdot \frac{C(w_0) k!}{\delta(w_0)^k} \leq \infty.$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{nw}$ sor tehát minden $2l\pi i$-től különböző pontban abszolút konvergens, lokálisan egyenletesen konvergens, és reguláris függvényt állít elő. Így a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$

sor a $z = 1$ pont kivételével az egész síkon reguláris függvényt definiál. Ezzel beláttuk, hogy az $f(z)$ függvény az előírt módon analitikusan folytatható.

8. feladat (*Szűcs András*). Lássuk be, hogy egy zárt (azaz kompakt, perem nélküli), egyszeresen összefüggő sokaság nem tartalmazhat 1 kodimenziós, zárt, páratlan Euler-karakterisztikájú, sima részsokaságot.

Megoldás (*Elekes Márton* és *Matolcsi Máté*). Ismeretes, hogy minden páratlan dimenziós zárt sokaság Euler-karakterisztikája nulla. Valóban, az Euler-karakterisztika megegyezik egy tetszőlegesen választott, véges sok nullhellyel bíró vektormezőnek a zérushelyeken vett forgásának az összegével. De páratlan dimenzióban a vektormező ellentettjét véve a mező forgása is előjelet vált minden pontban, a forgások összege azonban ugyanaz marad.

Legyen M egy zárt, egyszeresen összefüggő sokaság, és A egy összefüggő 1 kodimenziós sima részsokaság. Ha A páratlan dimenziós, akkor az Euler-karakterisztikája nulla, tehát páros. Legyen tehát A páros dimenziós. Belátjuk, hogy A kétfelé vágja az M sokaságot: definiálunk egy ekvivalenciarelációt $M \setminus A$ pontjain. M két pontja akkor ekvivalens, ha összeköthetők olyan folytonos görbével, amelyik páros sokszor metszi az A sokaságot és transzverzális rá minden metszéspontban. Világos, hogy legfeljebb két ekvivalenciaosztály van, most belátjuk, hogy nem lehet minden pont ekvivalens.

Válasszunk egy olyan sima görbét, amelyik csupán egy pontban metszi az A sokaságot, és ott transzverzális rá. A metszéspont két ívre osztja a görbénket, válasszunk egy-egy pontot ezeken az íveken. Ekkor a két választott pontot egy olyan út köti össze egymással, amelyik csak egy pontban metszi az A sokaságot. Ha olyan úttal is össze tudnánk kötni őket, amelyik páros sokszor metszi az A sokaságot, akkor a két út egyesítése egy olyan zárt görbe, amelyik páratlan sok pontban, transzverzálisan metszi az A sokaságot. Az M sokaság egyszeresen összefüggő, azért a zárt görbénk null-homotóp, azaz létezik az egység körlapnak egy olyan $H : D \to M$ folytonos leképezése, ami a kör határát éppen a mi zárt görbénkbe viszi. Kis perturbációval elérhető, hogy a H leképezés sima legyen, és transzverzális az A sokaságra, de a kör határának képe továbbra is páratlan sok pontban messe az A sokaságot. Ekkor a $H(D) \bigcap A$ egy 1 dimenziós peremes sokaság, aminek a pereme páratlan sok pontból áll. Ilyen azonban nincsen.

Tehát A valóban kettévágja az M sokaságot, a két rész a fenti két ekvivalenciaosztály lezártja. Mind a két rész peremes sokaság, mindkettőnek A a pereme.

9. feladat (*Fejes Tóth Gábor* és *W. Kuperberg*). Tekintsük egységgömbök egy $\mathcal{G}$ rendszerét a d dimenziós $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{G}$ *k-adrendben redukált,* ha nem lehetséges $\mathcal{G}$-ből k gömböt elhagyni és azokat $k-1$ egységgömbbel helyettesíteni úgy, hogy az ilyen módon kapott új rendszer minden pontot lefed, amit a $\mathcal{G}$-hez tartozó gömbök lefedtek. Definiáljuk $\mathcal{G}$ alsó és felső sűrűségét a $\liminf\limits_{r\to\infty} N_{\mathcal{G}}(r)/r^d$ és $\limsup\limits_{r\to\infty} N_{\mathcal{G}}(r)/r^d$ mennyiségekkel, ahol $N_{\mathcal{G}}(r)$ jelöli azon $\mathcal{G}$-beli gömbök számát, melyeket az origó köré írt r sugarú gömb lefed.

Mutassuk meg, hogy létezik $\mathbb{R}^d$-beli egységgömböknek tetszőlegesen nagy alsó sűrűségű d-edrendben redukált rendszere, viszont van olyan c_d konstans, hogy egységgömböknek tetszőleges $d+1$-rendben redukált rendszerének felső sűrűsége legfeljebb c_d.

Megoldás (*Csörnyei Marianna*).

(1) *Létezik d-ed rendben redukált, tetszőlegesen nagy alsó sűrűségű rendszer.*

Ez $d = 1$-re nem igaz. Az elsőrendben redukált rendszer olyan, hogy semelyik hozzá tartozó egységgömböt (azaz 2 hosszúságú szakaszt) sem fed le a többiek uniója. Ha azonban egy pontot három szakasz is lefed, akkor közülük a középsőt lefedi a két szélső egyesítése. Ezért az r sugarú (azaz $2r$ hosszúságú) szakasz által lefedett $\mathcal{G}$-beli szakaszok együttes hossza legfeljebb $4r$, azaz $N_{\mathcal{G}}(r) \leq 2r$, a rendszer alsó és felső sűrűsége legfeljebb 2.

Az állítást $d \geq 2$ esetén bizonyítjuk. Megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{G}$ olyan gömbökből áll, melyek középpontjai egy egyenesre esnek, akkor $\mathcal{G}$ biztosan d-ed rendben redukált rendszer. Ebből az állítás triviálisan következik, ilyen gömbök tetszőlegesen nagy alsó sűrűségű rendszert alkothatnak.

Válasszunk ki tehát d darabot az egy egyenesre eső gömbök közül. Egy gömb középpontjában az egyenesre merőleges hipersíkot állítva az a gömböt egy d dimenziós tömör gömbben metszi, ennek a határa egy olyan $d-1$ dimenziós egységgömbfelület, amelyik a $\mathcal{G}$ rendszer összes többi gömbjétől diszjunkt. Tehát van d darab $d-1$ dimenziós egységgömbfelületünk, ezeket nem lehet d-nél kevesebb d dimenziós tömör egységgömbbel lefedni. Valóban, ha d-nél kevesebb zárt halmaz lefedi valamelyik $d-1$-dimenziós egységgömb felületét, akkor valamelyikük tartalmaz egy átellenes pontpárt, és egy d dimenziós egységgömb csak úgy tartalmazhat átellenes pontpárt, ha a középpontja megegyezik a $d-1$ dimenziós egységgömb középpontjával. Tehát ha mind a d kiválasztott gömbünket lefedjük d-nél kevesebb gömbbel, akkor mind a d gömbnek szerepelnie kell a fedő gömbök között, ami viszont lehetetlen. Ezzel $d \geq 2$ esetén beláttuk az (1) állítást.

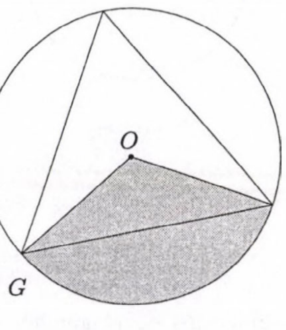
(2) *Nem létezik $d+1$-ed rendben redukált, tetszőlegesen nagy felső sűrűségű rendszer.*

$d = 1$ esetén már láttuk: itt még d-ed rendben redukált, 2-nél nagyobb felső sűrűségű rendszer sincs. Ha egy rendszer legalább $d+1$ gömbből áll, és $d+1$-ed rendben redukált, akkor nyilván d-ed rendben is redukált: ha valamelyik d gömböt lehetne $d-1$ gömbbel helyettesíteni, akkor még egy gömböt elhagyva, és rögtön vissza is téve, $d+1$ gömböt helyettesítenénk d gömbbel.

Vizsgáljuk a $d \geq 2$ esetet.

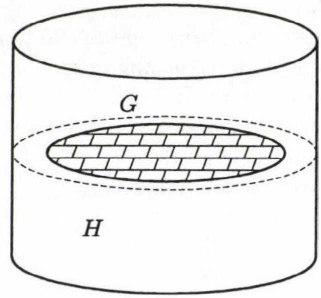
Lemma. *Egy $d-1$ dimenziós zárt egységgömb lefedhető d darab d dimenziós nyílt egységgömbbel. ($\mathbb{R}^d$-ben.)*

Bizonyítás. A $d = 2$ eset triviális, egy 2 hosszúságú szakaszt nyilván lefedhetünk két nyílt egységkör-lemezzel.

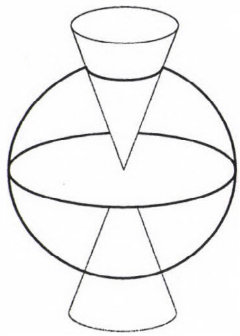


Legyen most $d \geq 3$ és G egy $d-1$ dimenziós tömör egységgömb. Vegyünk fel az egységgömb felszínén d pontot, amelyek egy szabályos $d-1$ dimenziós szimplex csúcsai. A szimplexnek van d darab lapja. A G gömböt felbontjuk d tartományra: minden laphoz tartozik egy tartomány, amely G azon pontjaiból áll, amelyeken áthaladó, a középpontból indított félegyenes metszi a lapot. Minden lap középpontja körül rajzolunk egy egységsugarú gömböt. Könnyen látható, hogy ezek a gömbök teljes egészében lefedik a G egy-egy tartományát (azt, amelyik a középpontot tartalmazza). Tehát a d gömb együttesen lefedi G-t. Ezzel beláttuk a lemmát.

Hengernek fogjuk nevezni az $\mathbb{R}^d$ olyan alakzatát, amelyik egy $d-1$ dimenziós tömör gömb és egy rá merőleges szakasz direkt szorzata.



A fenti G gömb köré olyan H hengert rajzolunk, amelyik alapgömbje $(1+\varepsilon)$ sugarú, a magassága 2ε, a tengelye átmegy G középpontján és merőleges G-re, és G éppen a középhipersíkban van, azaz az alap- és a fedőlap egyaránt ε távolságra vannak G-től. (Lásd az ábrán.) A G gömböt lefedtük d darab d dimenziós nyílt egységgömbbel, azok a G egy kicsiny környezetét is lefedik. Válasszuk az ε értékét olyan kicsire, hogy a gömbök lefedjék a H hengert is! (Ez az ε csak a d dimenziótól függő konstans.)



Jelöljük α-val azt a hegyesszöget, melynek tangense éppen

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon}$$

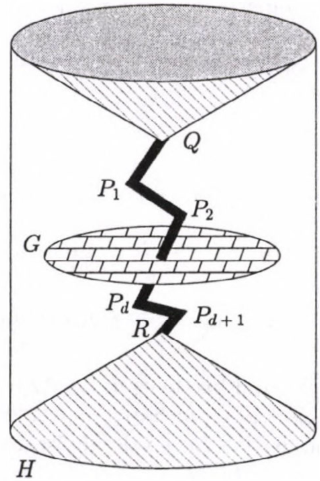
Fedjük le az O középpontú d dimenziós egységgömböt $\alpha/2$ nyílásszögű, O csúcspontú kettős kúpokkal (lásd az ábrán). Mivel az egységgömb kompakt, azért ehhez biztosan elég véges sok kúp, legyenek ezek: $K_1, K_2, \dots, K_m$, ahol m a kúpok száma, megint csak a d dimenziótól függő állandó.

A Ramsey-tétel szerint van olyan M konstans, hogy ha egy teljes gráfnak legalább M éle van, és az éleit m színnel színezzük, akkor biztosan található benne $d+3$ csúcsú egyszínű teljes részgráf. Ez az M is csak a d dimenziótól függ.

Bebizonyítjuk, hogy ha $\mathcal{G}$ egységgömbök egy $d+1$-ed rendben redukált rendszere, akkor bármelyik $\varepsilon/2$ átlójú d dimenziós kockában biztosan M-nél kevesebb gömbközéppont van. Ebből a (2) állítás már következik, mert egy r sugarú gömb lefedhető Cr^d darab $\varepsilon/2$ átlójú kockával (itt C egy ε-tól függő konstans), tehát legfeljebb MCr^d darab $\mathcal{G}$-beli egységgömböt fed le, azaz $\mathcal{G}$ felső sűrűsége legfeljebb MC.

Tegyük tehát fel, hogy egy $\varepsilon/2$ átlójú kockában van M gömbközéppont. Tekintsük ezeket egy teljes gráf csúcsainak, és színezzük ki az éleit m színnel, a következő módon: húzzunk az éllel párhuzamost az O ponton keresztül, és nézzük meg, hogy ezt a $K_1, \dots, K_m$ kúpok közül melyik tartalmazza (ha több ilyen is van, akkor válasszunk egyet). Ha K_i-ben van benne, akkor színezzük ki az élet az i-edik színnel. Tudjuk, hogy van $d+3$ csúcsú egyszínű teljes gráf, tehát ki lehet választani $d+3$ gömbközéppontot úgy, hogy bármely kettőt összekötő egyenes iránya ugyanahhoz a kúphoz tartozik, azaz bármely két ilyen egyenes egymással bezárt szöge legfeljebb α.

Tehát a pontok majdnem egy egyenesen vannak. Válasszunk ki a két legszélső pontot (tehát amelyek távolsága a legnagyobb), legyenek ezek Q és R, a többi pont pedig $P_1, P_2, \dots, P_{d+1}$. Rajzoljunk a QR szakasz felezőpontja körül a rá merőleges hipersíkban egy $d-1$ dimenziós G egységgömböt, majd rajzoljuk meg G körül a fentebb definiált H hengert.



A QR távolság legfeljebb $\varepsilon/2$, tehát a Q távolsága a henger fedőlapjától nagyobb, mint $\varepsilon/2$. Így az ábrán látható, a Q csúcsúból a henger fedőlapjára állított kúp fél nyílásszöge nagyobb, mint $90^\circ - \alpha$.

Bebizonyítjuk, hogy a $P_1, P_2 \dots, P_{d+1}$ körüli egységgömböket lefedik a Q és az R körüli egységgömbök, valamint a H henger. Láttuk, hogy a henger lefedhető d darab egységgömbbel, tehát ellentmondásra jutunk: mégsem lehet a rendszer $d+1$-ed rendben redukált.

Q távolsága a henger palástjától $1+\varepsilon$, a P_iQ távolságok pedig mind rövidebbek ε-nál (mert a kocka átlója $\varepsilon/2$), így a P_i pontok körüli egységgömbök a henger palástján belül vannak. Legyen A egy olyan pont, amelyik benne van a P_i középpontú egységgömbben, de nincs benne a Q körüli egységgömbben. Ekkor $AQP_i\sphericalangle < 90°$, és $P_iQR\sphericalangle < \alpha$, így biztosan $AQR\sphericalangle < 90° + \alpha$. Tehát az A pont a fenti Q csúcsú kúp alatt helyezkedik el.

Hasonló módon, az R csúcsból a H henger alapjára állított kúp felett, és a henger palástján belül vannak azok a pontok, amelyek a P_i köré írt egységgömbben benne vannak, de az R középpontú egységgömbben nem. Tehát azok a pontok, amelyek benne vannak valamelyik P_i körüli egységgömbben, de nem tartalmazza őket sem a Q, sem pedig az R köré írt egységgömb, mindannyian a henger palástján belül, a fenti két kúp közötti tartományban vannak, így valóban lefedi őket a H henger. Ezzel beláttuk a feladat valamennyi állítását.

10. feladat (*Michaletzky György*). Legyenek $Y_1, \ldots, Y_n$ felcserélhető valószínűségi változók, azaz tetszőleges π permutáció esetén $\left(Y_{\pi(1)}, \ldots, Y_{\pi(n)}\right)$ eloszlása megegyezik $(Y_1, \ldots, Y_n)$ eloszlásával. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} Y_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Jelölje $S_{(0)}, \ldots, S_{(n)}$ az $S_0, \ldots, S_n$ valószínűségi változókból képzett rendezett mintát. Mutassuk meg, hogy $S_{(j)}$ eloszlása megegyezik

$$\max_{0\le i\le j} S_i + \min_{0\le i\le n-j} (S_{j+i} - S_j)$$

eloszlásával.

Megoldás (*Braun Gábor*). A $j = 0$ és a $j = n$ eset triviális:

$$\max_{0\le i\le 0} S_i + \min_{0\le i\le n} (S_i - S_0) = S_0 + \min_{0\le i\le n} (S_i - S_0) = S_{(0)}$$

$$\max_{0\le i\le n} S_i + \min_{0\le i\le n} (S_{n+i} - S_n) = \max_{0\le i\le n} S_i = S_{(n)}$$

Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be. Az $n = 1$ eset a fentiekből azonnal következik, így csak az indukciós lépés van hátra, $n \ge 2$ és $1 \le j \le n-1$ esetben. Jelölje $T_{(0)}, T_{(1)}, \ldots, T_{(n-1)}$ az $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ valószínűségi változókból képzett rendezett mintát, és legyen

$$A_k = \max_{0\le i\le k} S_i + \min_{0\le i\le n-k-1} (S_{k+i} - S_k)$$

$$B_k = \max_{0\le i\le k} S_i + \min_{0\le i\le n-k-1} (S_{k+1+i} - S_{k+1})$$

$$C_k = \max_{0\le i\le k} S_i + \min_{0\le i\le n-k} (S_{k+i} - S_k)$$

Az indukciós feltevés folytán $T_{(k)}$ és A_k azonos eloszlásúak ($0 \le k \le n-1$). Ha az A_k definíciójában szereplő $Y_{k+1}, \dots, Y_{n-1}$ változókat kicseréljük rendre az $Y_{k+2} \dots, Y_n$ változókra, akkor éppen a B_k definícióját kapjuk. Mivel az $Y_1, \dots, Y_n$ felcserélhetők, azért A_k és B_k azonos eloszlásúak. Látható, hogy C_j definíciójában ugyanazok a tagok szerepelnek, mint A_j és B_{j-1} definíciójában együttvéve, ezért nyilvánvaló, hogy

$$B_{j-1} \le C_j \le A_j$$

Azt kell igazolni, hogy $S_{(j)}$ és C_j azonos eloszlásúak, azaz minden $a \in \mathbb{R}$ számra $P\left(S_{(j)} \le a\right) = P\left(C_j \le a\right)$. A teljes valószínűség tétele szerint:

$$P\left(S_{(j)} \le a\right) = P\left(S_{(j)} \le a \middle| S_n \le a\right) \cdot P\left(S_n \le a\right) +$$

$$+ P\left(S_{(j)} \le a \middle| S_n > a\right) \cdot P\left(S_n > a\right)$$

és

$$P\left(C_j \le a\right) = P\left(C_j \le a \middle| S_n \le a\right) \cdot P\left(S_n \le a\right) +$$

$$+ P\left(C_j \le a \middle| S_n > a\right) \cdot P\left(S_n > a\right).$$

Így elég belátni, hogy

(1)
$$P\left(S_{(j)} \le a \middle| S_n \le a\right) = P\left(T_{(j-1)} \le a \middle| S_n \le a\right) =$$
$$= P\left(B_{j-1} \le a \middle| S_n \le a\right) = P\left(C_j \le a \middle| S_n \le a\right)$$

és

(2)
$$P\left(S_{(j)} \le a \middle| S_n > a\right) = P\left(T_{(j-1)} \le a \middle| S_n > a\right) =$$
$$= P\left(B_{j-1} \le a \middle| S_n > a\right) = P\left(C_j \le a \middle| S_n > a\right).$$

Az azonos eloszlású A_k, B_k, $T_{(k)}$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak maradnak minden, az $Y_1, \dots, Y_n$ változókban szimmetrikus feltétel mellett, mint amilyen például a $\sum_{i=1}^{n} Y_i = S_n \le a$ és az $S_n > a$ feltétel. Tehát (1) és (2) középső egyenlősége fennáll. A négy szélső egyenlőség pedig azért teljesül, mert mind a négy egyenlőség mindkét oldalán a megadott feltétel mellett azonos események valószínűsége áll, amint azt hamarosan belátjuk:

(3) $$S_n \le a \quad \text{esetén} \quad S_{(j)} \le a \Longleftrightarrow T_{(j-1)} \le a$$

(4) $$\text{és} \quad B_{j-1} \le a \Longleftrightarrow C_j \le a$$

(5) $$a < S_n \quad \text{esetén} \quad S_{(j)} \le a \Longleftrightarrow T_{(j)} \le a$$

(6) $$\text{és} \quad A_j \le a \Longleftrightarrow C_j \le a.$$

Valóban:

(3) $S_{(j)} \leq a$ azt jelenti, hogy $S_0, \dots, S_n$ közül legalább j darab kisebb, vagy egyenlő, mint a. Az $S_n \leq a$ feltétel mellett ez azzal ekvivalens, hogy $S_1, \dots, S_{n-1}$ közül legalább $j-1$ darab kisebb, vagy egyenlő, mint a. Ez pedig éppen a $T_{(j-1)} \leq a$ esemény.

(4) Minthogy $B_{j-1} \leq C_j$, azért nyilván $C_j \leq a \Rightarrow B_{j-1} \leq a$. Ha pedig $B_{j-1} \leq a$ és $S_n \leq a$ teljesül, akkor

$$C_j = \max\left(B_{j-1}, S_j + \min_{0 \leq i \leq n-j}(S_{j+i} - S_j)\right) \leq \max\left(B_{j-1}, S_j + (S_n - S_j)\right) =$$
$$= \max\left(B_{j-1}, S_n\right) \leq a.$$

Tehát $B_{j-1} \leq a \Rightarrow C_j \leq a$.

(5) $S_{(j)} \leq a$ azt jelenti, hogy $S_0, \dots, S_n$ közül legalább j darab kisebb, vagy egyenlő, mint a. Az $a < S_n$ feltétel mellett ez azzal ekvivalens, hogy $S_1, \dots, S_{n-1}$ közül is legalább j darab kisebb, vagy egyenlő, mint a, azaz $T_{(j)} \leq a$.

(6) Mivel $C_j \leq A_j$, azért nyilván $A_j \leq a \Rightarrow C_j \leq a$. Ha pedig $C_j \leq a$, akkor

$$a \geq C_j = \min\left(A_j, \left(\max_{0 \leq i \leq j} S_i\right) + (S_n - S_j)\right) \geq \min\left(A_j, S_j + S_n - S_j\right) = \min\left(A_j, S_n\right).$$

Ez pedig az $S_n > a$ feltétel mellett csak úgy lehetséges, ha $A_j \leq a$. Tehát $C_j \leq a \Rightarrow A_j \leq a$.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Dr. Katz Sándor összeállításában megjelent a „Szakirodalmak a matematika tanításához” című CD-ROM.
A CD kb. 1100 könyv, monográfia, feladatgyűjtemény, tankönyv és egyéb szakkönyv adatait, szerzőt, címet, témát, kiadót, megjelenés évét tartalmazza, és ezen szempontok alapján lehet keresni a könyvek között.
Kb. 1900 folyóiratcikk között böngészhetünk szintén szerző, cím, téma, forrás és megjelenés éve szerint.
Az ajánlott cikkek közül 200-at teljes terjedelemben is tartalmaz a CD, amelyek elolvashatók vagy kimenthetők, akár részleteikben is felhasználhatók.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas – Tel.: 77/421-344/153

Matematikai Lapok

1998–99/3–4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 8–9. évfolyam (1998–99), 3–4. szám

(Megjelent 2003-ban)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

KÖZÉPÉRTÉKEK GAUSS-FÉLE KOMPOZÍCIÓJA ÉS A MATKOWSKI–SUTÔ PROBLÉMA MEGOLDÁSA

DARÓCZY ZOLTÁN ÉS PÁLES ZSOLT*

Bevezetés

1995-ben a 5th International Conference on Functional Equations and Inequalities (Muszyna, Lengyelország) című nemzetközi konferencián esős, borongós időben került sor a programhoz tartozó hagyományos piknikre. Az ilyen összejövetelekre épített félig nyitott faházban, a nyitott tűzhely körül majdnem mindenütt sűrűn ettek, ittak és csevegtek, később énekeltek a világ minden tájáról összesereglett résztvevők. Ebben a környezetben kérdezte Janusz Matkowski lengyel matematikus a magyar résztvevőktől, akik körében többen voltunk olyanok, akik a középértékek elméletében is dolgoztunk, a következő *problémát:*

Mikor lesz két kváziaritmetikai közép összege egyenlő az aritmetikai közép kétszeresével?

A probléma megértéséhez szükségünk van valamely nemüres, nyílt $I \subset \mathbb{R}$ intervallumban értelmezett *kváziaritmetikai közép* fogalmára. Az $M : I^2 \to I$ függvényt kváziaritmetikai középnek nevezzük az I intervallumban, ha létezik olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton* és *folytonos* függvény, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) =: A_\varphi(x,y)$$

teljesül minden $x, y \in I$-re, ahol φ^{-1} a φ függvény létező inverzét jelöli. Az itt szereplő φ függvényt az A_φ kváziaritmetikai közép *generáló függvényének* nevezzük. Ha $\varphi(x) = x$ $(x \in I)$ az identikus leképezés, akkor az általa generált középérték a jólismert

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}$$

aritmetikai középérték minden $x, y \in I$-re. Mármost a Matkowski probléma a következőt jelenti:

*Research supported by the Hungarian Scientific Research Fund (OTKA), Grant T-030082 and by the Hungarian Higher Education, Research, and Development Fund (FKFP) Grant 0215/2001.

Határozzuk meg mindazon φ, ψ az I intervallumon értelmezett szigorúan monoton és folytonos függvényeket, amelyekre teljesül az

$$\text{(M-S)} \qquad A_\varphi(x, y) + A_\psi(x, y) = x + y \qquad (x, y \in I)$$

függvényegyenlet.

Matkowski megjegyezte, hogy csak akkor boldogult a problémával, ha a φ, ψ generáló függvényekről további tulajdonságokat (regularitási, simasági feltételeket) tett fel, ami nyilván *nem természetes.*

Ettől az időponttól kezdve többen elraktároztuk agyunkban a problémát, ami azt is jelentette, hogy több-kevesebb intenzitással gondolkoztunk a megoldáson.

Az (M-S) egyenletről a következő érdekes és fontos megállapítások eléggé nyilvánvalóak:

(i) (M-S) igen szimmetrikus, mivel φ és ψ szerepe, valamint az x és y változók felcserélhetők;

(ii) Ha φ és ψ megoldása (M-S)-nek az I intervallumban, akkor bármely $K \subset I$ nemüres nyílt intervallumra vonatkozó megszorításuk is megoldása (M-S)-nek a K intervallumban;

(iii) Az (M-S) egyenlet két (adott tulajdonságú) ismeretlen függvényt és két független szabad változót tartalmaz ugyan, de az ismeretlen függvények létező inverzeivel *iterációt* (azaz összetett függvényképzést) is előír, ami közismerten megnehezíti a függvényegyenlet vizsgálatát.

Ugyanakkor a probléma igen szép tulajdonsága, hogy viszonylag kevés fogalom segítségével megfogalmazható, ezért besorolható az „eleminek" tűnő matematikai problémák körébe. Ez utóbbi megállapítás, vélemény alapján azt éreztük, hogy érdemes a probléma előzményeit, gyökereit is keresnünk.

Így jutottunk először O. Sutô ([63], [64]) 1914-ben megjelent dolgozatára, amelyben az (M-S) függvényegyenlet megoldásait az *analitikus* függvények körében meghatározta és eredménye megegyezett Matkowski ([40]) állításával, aki a *kétszeri folytonos differenciálhatóság* feltételezése mellett vizsgálta az egyenletet. Ezért tartjuk jogosnak a *Matkowski–Sutô*-probléma elnevezést az (M-S) függvényegyenletre.

Az előzmények feltárásában, kutatásában az a kérdés is izgatott bennünket, hogy miért érdekes a Matkowski–Sutô-probléma. Nyilvánvaló, hogy ez szubjektív megítélés kérdése egyrészt, másrészt számunkra minden olyan matematikai probléma „érdekesnek" minősül, amelynek jelentős múltja van. Már az (M-S) egyenletre vonatkozó megállapításokban megemlítettük az *iteráció* fogalmát (a (iii) alatti tények körében). Jól ismert közepekre vonatkozóan az iteráció a Gauss ([20]) által értelmezett *aritmetikai-geometriai* közép definíciójából ismert volt, aki az aritmetikai és geometriai középből kiindulva egy iteráció segítségével jutott el ehhez a fogalomhoz. Másrészt az irodalomban számosan foglalkoztak a Gauss-féle iteráció általánosításával, amelynek a lényege az volt, hogy két „absztrakt" középértékből kiindulva vizsgálták a Gauss-féle iteráció konvergenciáját. Mi ezen kutatások ismeretében megalkotjuk az általános *középérték* fogalmát és két középérték Gauss-féle kompozíciójának fogalmát, amely speciális esetben tartalmazza a Gauss-féle aritmetikai-geometriai közepet. A Gauss-féle kompozíció eredménye, amennyiben létezik, újra egy középérték. Mármost igaz az, hogy két tetszőleges kváziaritmetikai közép Gauss-féle kompozíciója mindig létezik, amely a következő probléma megfogalmazását teszi lehetővé:

Határozzuk meg mindazon kváziaritmetikai közepeket, amelyek Gauss-féle kompozíciója is kváziaritmetikai közép.

Erről a problémáról az „invariancia" egyenlet segítségével kiderül, hogy lényegében ekvivalens a Matkowski–Sutô-problémával. Ez a felismerés egyben távlatokat nyit a további kutatásoknak, mivel értelemszerűen adódik a fenti kérdésfeltevés *más,* a kváziaritmetikai közepektől különböző *középérték-osztályokra* is.

Ugyancsak az előzmények körébe sorolható Hilbert ([24]) 1900-ban közölt nevezetes problémái közül az *ötödik*. Lényegében Hilbert azt kérdezi, hogy amennyiben bizonyos folytonos függvények algebrai tulajdonságokkal is bírnak, nevezetesen függvényegyenleteknek tesznek eleget, mint a Lie-csoportok esetén, akkor a differenciálhatóság (simaság) következménye-e ezeknek. Ennek a problémának a vizsgálata napjainkban is tart, mivel egészen általános kérdésként is felfogható. Erről a kérdésről Aczél János ([3]) írt összefoglaló áttekintést, amelyből kiderül, hogy az *iterációt nem tartalmazó* esetben igen általános szerkezetű függvényegyenletekre vonatkozóan Járai Antal ([30], [29], [32], [31], [28], [26], [27]) vizsgálatai besorolhatók a Hilbert-féle ötödik probléma megoldása fogalmába. Ugyanakkor *iterációt tartalmazó* egyenletekre egyedi esetek ismertek (lásd például az [7], [38], [39], [6], [53], [54], [56] dolgozatokat), amelyeket egyedi módszerekkel lehet vizsgálni és amelyek esetében korántsem biztos, hogy Hilbert ötödik problémájában implicite kimondott sejtés igaz. Véleményünk szerint az (M-S) függvényegyenlet egy lehetséges példa Hilbert ötödik problémájára, amely *iterációt tartalmaz* és végső soron az eredmény a Hilbert-féle sejtést igazolja.

Végül röviden beszámolunk a Matkowski–Sutô-problémára vonatkozó erőfeszítéseink történetéről. Az első lényegesnek bizonyuló eredményt 1998-99 fordulóján értük el, kimutatva, hogy amennyiben az (M-S) egyenletben szereplő generáló függvények egyike *folytonosan differenciálható,* akkor a probléma megoldható ([17]). A második fontos eredményt a kiterjesztési tétel megfogalmazása és bizonyítása jelentette, amelyet 1999-ben Maksa Gyulával ([16]) együtt találtunk és amelyben támaszkodtunk Daróczy ([14]) egy speciális kérdésének C. T. Ng ([45]) és M. Sablik ([55]) által egymástól függetlenül adott megoldására. Ezután hosszabb ideig nem tudunk előrehaladásról beszámolni, bár a Matkowski–Sutô-típusú problémák területén értünk el eredményeket, de ezek az eredeti problémára nem adtak lényegesen új módszereket.

A döntő felismerés a századfordulóra (2000 vége és 2001 eleje) esik, amikor az addigi irányzatokat feladva és a függvényegyenletek elméletének más területén

Páles Zsolt által ([47], [49]) felismert és kidolgozott módszereket tanulmányozva sikerült az (M-S) egyenlet megoldásaira *további regularitási tulajdonságokat* bizonyítani. Ez azáltal volt lehetséges, hogy az (M-S) egyenlet egyrészt tartalmaz egy rejtett monotonitási tulajdonságot, másrészt az előforduló ismeretlen függvények monotonitása miatt alkalmazható Lebesgue nevezetes tétele az intervallumokon értelmezett monoton függvények majdnem mindenütti differenciálhatóságáról. Ezek nemtriviális finom meggondolásokkal arra vezettek, hogy valamely nemüres nyílt $K \subset I$ intervallumon *a megoldások differenciálhatók* el nem tűnő deriváltakkal. Az utolsó lépés, a létező deriváltak valamely további részintervallumon való *folytonossága*, a Baire-féle kategória tétel, illetve az első Baire-féle függvényosztályba tartozó függvények szerkezetének, valamint az (M-S)-ből származtatott függvényegyenlet fennállásának következménye. Ez utóbbi kérdés vizsgálatánál sokat köszönhetünk Járai Antal kollégánkkal folytatott szakmai beszélgetéseknek.

Összefoglalva a történeti áttekintést elmondhatjuk, hogy igen gyötrelmes kételyek (például 2000 nyarán Matkowski még ötven százalékos esélyt adott a nemsima megoldások létezésének) és mindig nagy örömet adó felismerések, bizonyítások egymásutáni láncolatának végeredménye a Matkowski–Sutô-probléma megoldása. Ezen gondolatokkal ajánljuk az olvasónak, hogy dolgozatunkat tovább tanulmányozva ismerkedjen meg a pontos részletekkel is.

1. Középértékek Gauss-féle kompozíciója

1.1. A Gauss-féle aritmetikai-geometriai közép. A Gauss-féle aritmetikai-geometriai közép a következő iterációval van értelmezve: Legyen $x, y \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges és

$$x_1 := x, \qquad y_1 := y$$
$$x_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} := \sqrt{x_n y_n} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Ekkor létezik a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n =: A \otimes G(x, y) \tag{2}$$

közös határérték, amelyet a Gauss-féle aritmetikai-geometriai középnek nevezünk a pozitív számok $\mathbb{R}_+$ halmazában.

A Gauss-féle aritmetikai-geometriai közép jelentős szerepet játszott a matematika történetében. 1791-ben a 15 éves Gauss kiszámította $A \otimes G\big(\sqrt{2}, 1\big)$ értékét 20 tizedesjegy pontossággal. 1799-ben észrevette, hogy a híres lemniszkáta konstans

$$L := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

akkor már ismert közelítő értéke szorozva $A \otimes G\left(\sqrt{2}, 1\right)$ közelítő értékével több tizedesjegyig megegyezik $\frac{\pi}{2}$ ugyancsak közelítő értékével. 1799. május 30-án naplójában megjegyezte, hogy amennyiben be lehetne bizonyítani az

$$L \cdot A \otimes G\left(\sqrt{2}, 1\right) = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

összefüggést, akkor a matematika egy új területe születne. 1799. december 23-án bejegyezte naplójába, hogy a (3) összefüggést bebizonyította és ezzel megnyílt az út az elliptikus integrálok és függvények Gauss-féle elméletének megalapozásához. A további történelmi eseményeket számos kiváló munkában tanulmányozhatjuk ([20], [67], [68], [11], [8], [60]), [66].

Ismeretes, hogy Gauss végül megtalálta az általános formulát $A \otimes G$-re, amely szerint

$$A \otimes G(x, y) = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2 t + y^2 \sin^2 t}} \right)^{-1} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+). \tag{4}$$

Mivel a (4)-ben szereplő elliptikus integrál kiszámítása számos gyakorlati problémában kívánatos, ugyanakkor zárt formulával nem lehetséges, ezért már Gauss előtt is sok matematikus foglalkozott az ilyen típusú integrálok numerikus kérdéseivel. Mivel az (1) Gauss-féle iteráció igen gyorsan konvergál az $A \otimes G$ aritmetikai-geometriai középhez, ezért Gauss felfedezése jelentős szerepet játszik a numerikus analízisben is ([68], [11]).

Lényegében már Gauss belátta, hogy az $A \otimes G$ közép eleget tesz az

$$A \otimes G\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy} \right) = A \otimes G(x, y) \tag{5}$$

függvényegyenletnek minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ értékre. Az (5) függvényegyenletet szokás *invariancia-egyenletnek* nevezni, amelynek fundamentális szerepét a későbbiekben látni fogjuk.

A Gauss-féle aritmetikai-geometriai közepekkel kapcsolatos irodalomjegyzéket 1927-ig a [20] mű tartalmazza, amelynek kiadója H. Geppert részletes megjegyzéseket és történelmi összefoglalót írt Gauss művéhez.

A Gauss-féle iteráció általánosításairól a [12], [60], [11] művek tartalmaznak vizsgálatokat. Újabban Matkowski ([40], [41]) vizsgálatai is ez irányba mutatnak, bár az előzményekre nem hivatkozik.

Ezen történeti előkészület után a következőkben a ***középek*** általános definíciója segítségével értelmezni fogjuk a Gauss-féle iterációt és vizsgáljuk annak konvergenciáját. Ez utóbbi esetben értelmezzük két közép *Gauss-féle kompozícióját* és annak invariancia tulajdonságát. Ezt a részt az irodalomban megtalálható néhány nevezetes példával zárjuk.

1.2. Középértékek Gauss-féle kompozíciója. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallum.

1.2.1. definíció. Az $M : I^2 \to I$ függvényt *középnek* nevezzük I-ben, ha teljesíti a következő tulajdonságokat:
(M1) $\min\{x, y\} \leq M(x, y) \leq \max\{x, y\}$, ha $x, y \in I$;
(M2) M folytonos I^2-en.

1.2.2. definíció. Az $M : I^2 \to I$ függvényt *szigorú középnek* nevezzük I-ben, ha közép I-ben és

(SM) $\qquad \min\{x, y\} < M(x, y) < \max\{x, y\}, \quad$ ha $\quad x \neq y;\ x, y \in I.$

Legyenek adottak az $M_i : I^2 \to I$ $(i = 1, 2)$ közepek I-ben. Legyen továbbá $(x, y) \in I^2$ tetszőleges. Ekkor az

$$(6) \qquad \begin{array}{lll} x_1 := x, & y_1 := y & \\ x_{n+1} := M_1(x_n, y_n), & y_{n+1} := M_2(x_n, y_n) & (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

iteráció-sorozatot az (M_1, M_2) pár által meghatározott *Gauss-féle iterációnak* nevezzük az $(x, y) \in I^2$ kezdeti értékekkel.

Legyen I_n az x_n és y_n által meghatározott zárt intervallum. Ekkor a közép (M1) tulajdonsága miatt

$$I_{n+1} \subseteq I_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt mondjuk, hogy a (6) Gauss-féle iteráció *konvergens*, ha $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ egyelemű halmaz bármely $(x, y) \in I^2$ kezdeti értékre. Cantor tétele miatt ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n =: M_1 \otimes M_2(x, y),$$

ahol $M_1 \otimes M_2 : I^2 \to I$ függvény.

1.2.3. tétel. *Ha M_1 és M_2 adott közepek I-ben és az (M_1, M_2) pár által meghatározott Gauss-féle iteráció konvergens, akkor az $M_1 \otimes M_2 : I^2 \to I$ függvény közép I-ben.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $M_1 \otimes M_2 : I^2 \to I$ eleget tesz az (M1) tulajdonságnak, ezért elegendő belátni folytonosságát.

Az értelmezés miatt az

$$x_n =: M_1^{(n)}(x, y), \qquad y_n =: M_2^{(n)}(x, y)$$

függvények közepek I-ben. Ez $n = 1$ esetén $x_1 = x =: M_1^{(1)}(x, y)$ és $y_1 = y =:$ $=: M_2^{(1)}(x, y)$ jelölésekkel nyilvánvaló. Ha feltesszük, hogy állításunk n-re igaz, akkor (6) miatt

$$x_{n+1} = M_1(x_n, y_n) = M_1\big(M_1^{(n)}(x, y), M_2^{(n)}(x, y)\big) =: M_1^{(n+1)}(x, y),$$

$$y_{n+1} = M_2(x_n, y_n) = M_2\big(M_1^{(n)}(x, y), M_2^{(n)}(x, y)\big) =: M_2^{(n+1)}(x, y),$$

ahonnan az összetett függvény folytonossága miatt az állítás $(n+1)$-re is igaz.

Legyen most

$$\begin{aligned} \alpha_n(x,y) &:= \min\{x_n, y_n\}, \\ \omega_n(x,y) &:= \max\{x_n, y_n\} \end{aligned} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $\alpha_n : I^2 \to I$ folytonos függvények monoton növekvő és $\omega_n : I^2 \to I$ folytonos függvények monoton csökkenő sorozata, amelyek az $M_1 \otimes M_2 : I^2 \to I$ függvényhez konvergálnak. Ezért $M_1 \otimes M_2$ alulról félig folytonos és felülről félig folytonos I^2-en, azaz folytonos. ■

1.2.4. megjegyzés. A bizonyítás elvégezhető közvetlenül is, miután tudjuk, hogy $M_i^{(n)} : I^2 \to I$ $(i = 1,2)$ folytonos függvények.

Legyen $(x_0, y_0) \in I^2$ tetszőleges. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz *létezik* $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$(8) \qquad M_i^{(N)}(x_0, y_0) \in \mathcal{G}\left(M_1 \otimes M_2(x_0, y_0), \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (i = 1,2),$$

ahol $\mathcal{G}(t,r) :=]t-r, t+r[$ a t középpontú $r > 0$ sugarú nyílt gömb $\mathbb{R}$-ben.

Másrészt $M_i^{(N)}$ $(i = 1,2)$ folytonossága és (8) miatt létezik $\delta > 0$, hogy ha $(x,y) \in I^2$ és $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, akkor

$$M_i^{(N)}(x,y) \in \mathcal{G}\left(M_1 \otimes M_2(x_0, y_0), \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (i = 1,2).$$

Ekkor az $M_1^{(N)}(x,y)$ és $M_2^{(N)}(x,y)$ által meghatározott zárt intervallum tartalmazza az $M_1 \otimes M_2(x,y)$ értéket, ezért

$$\left|M_1 \otimes M_2(x,y) - M_1 \otimes M_2(x_0,y_0)\right| < \varepsilon,$$

azaz $M_1 \otimes M_2$ folytonos $(x_0, y_0) \in I^2$-ben.

1.2.5. definíció. Ha M_1 és M_2 közepek I-ben és az (M_1, M_2) pár által meghatározott Gauss-féle iteráció konvergens, akkor az $M_1 \otimes M_2 : I^2 \to I$ egyértelműen meghatározott közepet az M_1 és M_2 *Gauss-féle kompozíciójának* nevezzük I-ben.

1.2.6. tétel. *Ha M_1 és M_2 közép I-ben és valamelyik közülük szigorú közép I-ben, akkor az (M_1, M_2) pár által meghatározott Gauss-féle iteráció konvergens.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy M_1 szigorú közép I-ben. Az előző tétel bizonyításában szereplő jelöléseket használva ekkor bármely $(x,y) \in I^2$ esetén $\alpha_n(x,y)$ monoton növekvő és $\omega_n(x,y)$ monoton csökkenő tulajdonsága miatt léteznek az

$$\alpha(x,y) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x,y) \quad \text{és} \quad \omega(x,y) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x,y)$$

határértékek és $\alpha(x,y) \le \omega(x,y)$.

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy létezik olyan $(x_0, y_0) \in I^2$, hogy $\alpha(x_0, y_0) < \omega(x_0, y_0)$. Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$-re

$$\alpha_n(x_0, y_0) \le \alpha(x_0, y_0) < \omega(x_0, y_0) \le \omega_n(x_0, y_0). \tag{9}$$

M_1 szigorú volta miatt

$$\alpha(x_0, y_0) < M_1\big(\alpha(x_0, y_0), \omega(x_0, y_0)\big) < \omega(x_0, y_0),$$

$$\alpha(x_0, y_0) < M_1\big(\omega(x_0, y_0), \alpha(x_0, y_0)\big) < \omega(x_0, y_0).$$

Ekkor M_1 folytonossága és az ismert limesz relációk miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\alpha(x_0, y_0) < M_1\big(\alpha_N(x_0, y_0), \omega_N(x_0, y_0)\big) < \omega(x_0, y_0),$$

$$\alpha(x_0, y_0) < M_1\big(\omega_N(x_0, y_0), \alpha_N(x_0, y_0)\big) < \omega(x_0, y_0).$$

Mivel $x_N = \alpha_N(x_0, y_0)$ vagy $x_N = \omega_N(x_0, y_0)$, ezért az előző egyenlőtlenségekből

$$\alpha(x_0, y_0) < x_{N+1} = M_1^{(N+1)}(x_0, y_0) < \omega(x_0, y_0)$$

következik, ami ellentmond (9)-nek. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ∎

1.2.7. tétel. *Legyen M_1 és M_2 adott közép I-ben és tegyük fel, hogy az (M_1, M_2) pár által meghatározott Gauss-féle iteráció konvergens. Ekkor az $M_1 \otimes M_2$ Gauss-féle kompozíció I-ben eleget tesz az*

$$M_1 \otimes M_2\big(M_1(x, y), M_2(x, y)\big) = M_1 \otimes M_2(x, y) \tag{10}$$

invariancia-egyenletnek minden $x, y \in I$-re. Továbbá ha $F : I^2 \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $F(x, x) = x$, $(x \in I)$ és teljesül az

$$F\big(M_1(x, y), M_2(x, y)\big) = F(x, y) \tag{11}$$

függvényegyenlet minden $x, y \in I$-re, akkor

$$F(x, y) = M_1 \otimes M_2(x, y)$$

minden $x, y \in I$-re.

Bizonyítás. (i) Mivel $M_1 \otimes M_2$ közép I-ben (1.2.§. 1.2.3. tétel) ezért

$$\lim_{n \to \infty} M_1 \otimes M_2(x_n, y_n) =$$

$$= M_1 \otimes M_2\big(M_1 \otimes M_2(x, y), M_1 \otimes M_2(x, y)\big) =$$

$$= M_1 \otimes M_2(x, y)$$

minden $x, y \in I$-re. Ebből

$$M_1 \otimes M_2\big(M_1(x,y), M_2(x,y)\big) = \lim_{n\to\infty} M_1 \otimes M_2(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

ahonnan adódik (10).

(ii) Tegyük fel, hogy $F : I^2 \to \mathbb{R}$ eleget tesz a tételben kimondott feltételeknek. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = F\big(M_1 \otimes M_2(x,y), M_1 \otimes M_2(x,y)\big) =$$
$$= M_1 \otimes M_2(x,y)$$

bármely $x, y \in I$-re. Másrészt (11)-ből

$$F(x_{n+1}, y_{n+1}) = F\big(M_1(x_n, y_n), M_2(x_n, y_n)\big) = F(x_n, y_n) =$$
$$= F(x_{n-1}, y_{n-1}) = \cdots = F(x,y),$$

ahonnan

$$F(x,y) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = M_1 \otimes M_2(x,y),$$

amivel a tételt bebizonyítottuk. ■

1.3. Példák a Gauss-féle kompozíció meghatározására. Az alábbiakban néhány ismert példát mutatunk be előző tételeinkre hivatkozva.

1.3.8. példa. Legyen $I := \mathbb{R}_+$ és

$$M_1(x,y) := \frac{2xy}{x+y}, \qquad M_2(x,y) := \frac{x+y}{2}$$

ha $x, y \in \mathbb{R}_+$. M_1 a harmonikus és M_2 az aritmetikai közép $\mathbb{R}_+$-ban. Ekkor

$$M_1 \otimes M_2(x,y) = \sqrt{xy} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+). \tag{12}$$

Mivel $F(x,y) := \sqrt{xy}$ $(x, y \in \mathbb{R}_+)$ folytonos és $F(x,x) = x$ (ha $x \in \mathbb{R}_+$), továbbá

$$F\big(M_1(x,y), M_2(x,y)\big) = \sqrt{\frac{2xy}{x+y}\frac{x+y}{2}} = F(x,y),$$

ezért az 1.2.§. 1.2.7. tétele miatt (12) igaz, mert M_1 és M_2 egyaránt szigorú közép I-ben, ezért a Gauss-féle iteráció konvergens.

1.3.9. példa. Legyen $I = \mathbb{R}_+$ és

$$M_1(x,y) := \frac{x+y}{2}, \qquad M_2(x,y) := \sqrt{\frac{x+y}{2}y}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_+$-ra. Ekkor az M_1, M_2 pár által meghatározott Gauss-féle iteráció konvergens, mivel mindkét közép szigorú. A következő állítás igaz (Schwab–Borchardt tétel [60], [11]):

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y^2 - x^2}}{\arccos \frac{x}{y}}, & \text{ha } 0 < x < y, \\ x, & \text{ha } y = x, \\ \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\operatorname{area\,cosh} \frac{x}{y}}, & \text{ha } 0 < y < x, \end{cases}$$

amelynek bizonyítása ekvivalens azzal, hogy ellenőrizzük az invariancia egyenlet teljesülését.

1.3.10. példa (Carlson [12]). Legyen $I = \mathbb{R}_+$ és

$$M_1(x, y) := \sqrt{\frac{x + y}{2} x}, \qquad M_2(x, y) := \sqrt{\frac{x + y}{2} y}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_+$-ra. Ekkor az (M_1, M_2) pár által meghatározott Gauss-féle iteráció konvergens és

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{2 \log\left(\frac{x}{y}\right)}}, & \text{ha } x \neq y, \\ x, & \text{ha } y = x \end{cases}$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_+$-ra. Közvetlen számolással ellenőrizhető az invariancia egyenlet teljesülése.

További példákra lásd a [11] és [60] munkákat.

2. Középértékosztályok

2.1. Kváziaritmetikai közepek. A legismertebb közép az $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallumon értelmezhető

$$A(x, y) := \frac{x + y}{2} \qquad (x, y \in I)$$

aritmetikai középérték. Ennek általánosítása a jólismert *kváziaritmetikai* közép fogalma. Legyen $\mathcal{CM}(I)$ az I intervallumon értelmezett folytonos és szigorúan monoton (valós értékű) függvények osztálya.

2.1.1. definíció. Az $M : I^2 \to I$ közepet *kváziaritmetikainak* nevezzük I-ben, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) =: A_\varphi(x,y) \tag{13}$$

minden $x, y \in I$-re. Ebben az esetben $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ a (13) kváziaritmetikai közép *generáló* függvénye.

A kváziaritmetikai közepek a legismertebb középértékosztályt képezik és gazdag a rájuk vonatkozó irodalom: [1], [5], [2], [4], [23], [19], [25], [34], [43], [52], [65], [33]. Jellemzésük megoldott a jól ismert Aczél-tétel szerint ([1], [2]):

Legyen $M : I^2 \to I$ olyan folytonos függvény, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

(i) $M(x,x) = x$, *ha* $x \in I$,

(ii) $M(x,y) = M(y,x)$, *ha* $x \in I$,

(iii) $x \mapsto M(x,y)$ *szigorúan monoton nő* I*-ben bármely rögzített* $y \in I$ *esetén,*

(iv) *bármely* $x, y, u, v \in I$*-re fennáll az*

$$M\big(M(x,y), M(u,v)\big) = M\big(M(x,u), M(y,v)\big)$$

biszimmetria egyenlet.

Ekkor létezik olyan $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$*, hogy* M (13) *alakú. Fordítva, ha* M *kváziaritmetikai közép* I*-ben, akkor teljesülnek az* (i), (ii), (iii) *és* (iv) *tulajdonságok és* M *folytonos.*

A jövőben használni fogjuk az $M \in \mathcal{QA}(I)$ jelölést, ha $M : I^2 \to I$ kvázarit-metikai közép I-ben.

2.1.2. definíció. Legyen $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. Ha létezik $\alpha \neq 0$ és β konstans, hogy

$$\psi(x) = \alpha\varphi(x) + \beta \qquad (x \in I), \tag{14}$$

akkor azt mondjuk, hogy φ *ekvivalens* ψ-vel I-ben; jelölésben: $\varphi(x) \sim \psi(x)$ ha $x \in I$ vagy $\varphi \sim \psi$ I-ben.

Jólismert az alábbi eredmény ([23], [13]).

2.1.3. tétel. *Két kváziaritmetikai közép* I*-ben akkor és csak akkor azonos, ha generáló függvényeik ekvivalensek* I*-ben.*

Ez azt jelenti, hogy ha $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ és $A_\varphi(x,y) = A_\psi(x,y)$ minden $x, y \in I$-re, akkor $\varphi(x) \sim \psi(x)$ ha $x \in I$ és fordítva, ha $\varphi \sim \psi$ I-ben, akkor $A_\varphi = A_\psi$ az I^2 halmazon.

A legismertebb kváziaritmetikai közepek a *homogén kváziaritmetikai* közepek. Ekkor $I = \mathbb{R}_+$ és az $M : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ közép *homogén*, ha bármely $x, y, t \in \mathbb{R}_+$-ra

$$M(tx, ty) = t\,M(x,y)$$

teljesül. Ismeretes, hogy egy kváziaritmetikai közép $\mathbb{R}_+$-ban akkor és csak akkor homogén, ha felírható a

$$(15) \qquad H_p(x,y) := \begin{cases} \left(\dfrac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ha } p \neq 0 \\ \sqrt{xy}, & \text{ha } p = 0 \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

alakban valamely $p \in \mathbb{R}$-re (ld. [23], [48]). A (15) közepeket szokás *hatványközepeknek* vagy *Hölder-közepeknek* nevezni $\mathbb{R}_+$-ban.

Megjegyezzük, hogy értelmezhető a *nemszimmetrikus* kváziaritmetikai közép is I-ben a következő módon. Az $M : I^2 \longrightarrow I$ közepet *nemszimmetrikus kváziaritmetikai* középnek nevezzük, ha létezik olyan $0 < \lambda < 1$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$ konstans és $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$(16) \qquad M(x,y) = \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)\big) =: A_\varphi(x, y; \lambda) \qquad (x, y \in I).$$

Ekkor λ-t súlynak és $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$-t *generálófüggvénynek* nevezzük. Szokás (16)-et *súlyozott kváziaritmetikai* középnek is nevezni (λ-val súlyozott φ generáló függvénnyel rendelkező kváziaritmetikai közép).

Megjegyezzük, hogy a (súlyozott) kváziaritmetikai közepek *szigorúak*, ezért bármely két ilyen középnek *létezik* Gauss-féle kompozíciója. Ugyanakkor a Gauss-féle aritmetikai-geometriai közép példája mutatja, hogy a kváziaritmetikai közepek osztálya *nem zárt* a Gauss-féle kompozícióra, mivel $A \otimes G$ nem kváziaritmetikai közép. Ez utóbbi állítás bizonyítása a 2.3.§. 2.3.9. tételét követő megjegyzésből következik.

2.2. Néhány további középértékosztály.

2.2.4. definíció. Az $M : I^2 \longrightarrow I$ közepet *konjugált-aritmetikai* középnek nevezzük I-ben, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$(17) \qquad M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) =: A_\varphi^*(x,y)$$

minden $x, y \in I$-re. Ekkor a $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ függvényt a (17) konjugált-aritmetikai közép generáló függvényének nevezzük.

Hasonlóan a 2.1.3. tételhez, most is igaz, hogy két konjugált-aritmetikai közép akkor és csak akkor egyenlő, ha generáló függvényeik ekvivalensek ([13]). Nyilvánvaló, hogy a konjugált-aritmetikai közepek szigorúak. $I = \mathbb{R}_+$ esetén ismertek a homogén konjugált-aritmetikai közepek ([13]).

2.2.5. definíció. Az $M : I^2 \to I$ közepet *kevert-aritmetikai* középnek nevezzük I-ben, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{3}\right) =: A_\varphi^\square(x,y) \tag{18}$$

minden $x, y \in I$-re. Most is $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ generáló függvénye (18)-nak, amely ekvivalencia erejéig egyértelműen meghatározza a kevert-aritmetikai közepet. Ezek a közepek is szigorúak.

Az előbbi két osztályt, valamint a kváziaritmetikai közepek osztályát is magába foglalja a következő fogalom ([18]).

2.2.6. definíció. Legyen $\alpha \geq -1$. Az $M : I^2 \to I$ közepet *α-rendű kváziaritmetikai középnek* nevezzük I-ben, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y) + \alpha\,\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2+\alpha}\right) =: A_\varphi^{(\alpha)}(x,y) \tag{19}$$

minden $x, y \in I$-re. Ekkor a $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ függvényt (19) generáló függvényének nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy $\alpha = 0$ esetén $A_\varphi^{(0)} = A_\varphi$ (kváziaritmetikai eset), $\alpha = -1$ esetén $A_\varphi^{(-1)} = A_\varphi^*$ (konjugált-aritmetikai eset) és $\alpha = 1$ esetén $A_\varphi^{(1)} = A_\varphi^\square$ (kevert-aritmetikai eset).

2.2.7. tétel. *Legyen $\alpha \geq -1$. Ha $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$, akkor $A_\varphi^{(\alpha)}(x,y) = A_\psi^{(\alpha)}(x,y)$ bármely $(x,y) \in I^2$-re pontosan akkor teljesül, ha $\varphi(x) \sim \psi(x)$ ha $x \in I$.*

Ez a tétel azt mondja ki, hogy az α-rendű kváziaritmetikai közepek egyértelműen meg vannak határozva generáló függvényeik ekvivalenciájától eltekintve.

2.2.8. definíció. Jelölje $\mathcal{P}(I)$ az $f : I \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvények halmazát. Az $M : I^2 \to I$ közepet *súlyfüggvénnyel súlyozott kváziaritmetikai középnek* nevezzük I-ben, ha létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ és $f \in \mathcal{P}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{f(x)\varphi(x) + f(y)\varphi(y)}{f(x) + f(y)}\right) =: A_{\varphi,f}(x,y) \qquad (x, y \in I). \tag{20}$$

Speciálisan $\varphi(x) = x$ $(x \in I)$ esetén kapjuk az

$$M(x,y) = \frac{f(x)x + f(y)y}{f(x) + f(y)} =: G_f(x,y) \qquad (x, y \in I)$$

középeket, amelyeket szokás *Beckenbach–Gini-középeknek* ([9], [10], [21]) nevezni, amelyeket az $f \in \mathcal{P}(I)$ súlyfüggvény határoz meg. A Beckenbach–Gini-középek jellemzési tételét Páles és Volkmann ([50]) találta és bizonyította be. Ha $p \in \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_+$ és $f(x) = x^{p-1}$, akkor kapjuk az

$$L_p(x,y) := \frac{x^p + y^p}{x^{p-1} + y^{p-1}} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

Lehmer-középeket ([37]). Ugyancsak speciális esetként kezelhetők az $I = \mathbb{R}_+$ esetben $f(x) := x^r$, $\varphi(x) := x^{s-r}$ $(s \neq r)$, illetve $\varphi(x) = \ln(x)$ $(s = r)$ jelölésekkel a kétparaméterű *Gini-középek* ([21]):

$$G_{s,r}(x,y) := \begin{cases} \left(\dfrac{x^s + y^s}{x^r + y^r}\right)^{\frac{1}{s-r}}, & \text{ha } x, y \in \mathbb{R}_+,\ s \neq r, \\ \exp\left(\dfrac{x^s \ln(x) + y^s \ln(y)}{x^s + y^s}\right), & \text{ha } x, y \in \mathbb{R}_+,\ s = r. \end{cases}$$

Azonnal látható, hogy az $r = 0$ speciális esetben $G_{s,r}$ az s paraméterű Hölder (vagy hatvány) közepet szolgáltatja. Megemlítjük még a kétparaméterű *Stolarsky-középeket* ([61], [62]), amelyek az alábbi módon vannak értelmezve az $I = \mathbb{R}_+$ intervallumon:

$$S_{p,q}(x,y) := \begin{cases} \left(\dfrac{q(x^p - y^p)}{p(x^q - y^q)}\right)^{\frac{1}{p-q}}, & \text{ha } pq(p-q)(x-y) \neq 0, \\ \left(\dfrac{x^p - y^p}{p\big(\ln(x) - \ln(y)\big)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ha } p(x-y) \neq 0,\ q = 0, \\ \left(\dfrac{q\big(\ln(x) - \ln(y)\big)}{x^q - y^q}\right)^{-\frac{1}{q}}, & \text{ha } q(x-y) \neq 0,\ p = 0, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{p} + \dfrac{x^p \ln(x) - y^p \ln(y)}{x^p - y^p}\right), & \text{ha } q(x-y) \neq 0,\ p = q, \\ \sqrt{xy}, & \text{ha } x - y \neq 0,\ p = q = 0, \\ x, & \text{ha } x - y = 0. \end{cases}$$

Az $S_{1,0}$ közepet szokás *logaritmikus*, az $S_{1,1}$ közepet pedig *identrikus* középnek nevezni. A hatványközepeket ebben a közép osztályban is fellelhetjük, u.i. könnyen látható, hogy $S_{2p,p} = H_p$ minden $p \in \mathbb{R}$ esetén.

2.3. Általánosított Matkowski–Sutô-típusú probléma. Legyen adott egy $\mathcal{K}$ középértékosztály az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumban. A *középértékosztály* általános fogalmát nem értelmezzük, helyette azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ jelentse a 2.2.§.-ban értelmezett középértékosztályok valamelyikét. Ezek a középértékosztályok generáló függvények, súlyfüggvények, paraméterek segítségével vannak értelmezve. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathcal{K}$ elemei szigorú közepek I-ben. Ekkor bármely $M_1, M_2 \in \mathcal{K}$ közepek esetén létezik az $M_1 \otimes M_2 : I^2 \to I$ Gauss-féle kompozíció, amely közép I-ben (1.2.§. 1.2.3. és 1.2.6. tételek). A $\mathcal{K}$ középértékosztályokra vonatkozó *általános Matkowski–Sutô-probléma* az, hogy határozzuk meg mindazon $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{K}$ közepeket, amelyekre

$$M_1 = M_2 \otimes M_3 \tag{21}$$

teljesül, azaz azon $M_2, M_3 \in \mathcal{K}$ közepeket, amelyek Gauss-féle kompozíciója is $\mathcal{K}$-beli közép.

A kérdésfelvetés ebben a formában igen általános, ugyanis bármely, eddig még nem értelmezett szigorú közepeket tartalmazó $\mathcal{K}$ középértékosztályra is megfogalmazható. Egy egyszerű esettel szeretnénk illusztrálni a problémát.

Legyen $I := \mathbb{R}_+$ és $\mathcal{K} = \mathcal{H} := \{H_p : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ \mid p \in \mathbb{R}\}$, ahol H_p a (15) alatt értelmezett Hölder- (vagy hatvány) középosztály. Ez egy $p \in \mathbb{R}$ paramétertől függő szigorú közepeket tartalmazó osztály $\mathbb{R}_+$-ban. Az általánosított Matkowski–Sutô-probléma azt kérdezi, hogy mely $p, q, s \in \mathbb{R}$ paraméterhármasra teljesül a

$$H_s = H_p \otimes H_q \tag{22}$$

összefüggés az $\mathbb{R}_+^2$ halmazon. Erre ad választ a következő tétel.

2.3.9. tétel. *Az $(s, p, q) \in \mathbb{R}^3$ számhármasra akkor és csak akkor teljesül a (22) azonosság az $\mathbb{R}_+^2$ halmazon, ha*

$$\begin{array}{llll} s \neq 0 & \textit{esetén} & p = q = s; & \textit{és} \\ s = 0 & \textit{esetén} & p + q = 0. & \end{array} \tag{23}$$

Bizonyítás. (i) Legyen először $s \neq 0$. Ekkor (22)-ből

$$H_p^s(x, y) + H_q^s(x, y) = x^s + y^s$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_+$-ra, ahonnan $u := x^s$, $v := y^s$ helyettesítésekkel és $a := \frac{p}{s}$, $b := \frac{q}{s}$ jelölésekkel

$$H_a(u, v) + H_b(u, v) = u + v \tag{24}$$

következik minden $u, v \in \mathbb{R}_+$-ra. Differenciálva (24)-et u szerint kapjuk, hogy

$$1 = \frac{\partial H_a(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial H_b(u,v)}{\partial u} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u}{H_a(u,v)}\right)^{a-1} + \left(\frac{u}{H_b(u,v)}\right)^{b-1}\right]$$

minden $u, v \in \mathbb{R}_+$-ra. Ebből $u = 1$ helyettesítéssel

$$H_a(1, v)^{1-a} + H_b(1, v)^{1-b} = 2. \tag{25}$$

Ha $a = b$, akkor (22)-ből $a = b = 1$. Ha $a \neq b$, akkor a szimmetria miatt feltehető, hogy $a < b$. Ekkor (24) miatt szükséges, hogy fennálljon az $a < 1 < b$ egyenlőtlenség. Ebből

$$\lim_{v \to +\infty} H_b(1, v)^{1-b} = 0. \tag{26}$$

Másrészt

$$\lim_{v \to +\infty} H_a(1, v)^{1-a} = \begin{cases} 0 & \text{ha } a = 0 \\ +\infty & \text{ha } 0 < a < 1 \\ 2^{\frac{a-1}{a}} & \text{ha } a < 0, \end{cases}$$

ahonnan (25) és (26) miatt ellentmondásra jutunk. Ezért $a \neq b$ lehetetlen, azaz $a = b = 1$. Ebből $\frac{p}{s} = \frac{q}{s} = 1$, azaz a (23) állításunk első része teljesül.

(ii) Ha most $s = 0$, akkor (22)-ből

$$H_p(x, y) H_q(x, y) = xy \tag{27}$$

következik minden $x, y \in \mathbb{R}_+$-ra. Ebből $pq = 0$ esetén $p = q = 0$ következik, ezért legyen a továbbiakban $pq \neq 0$. Ekkor (27)-ből

$$H_q(x, y) = H_{-p}(x, y)$$

adódik minden $x, y \in \mathbb{R}_+$-ra, ahonnan $q = -p$. Ezzel a (23) állítás második részét is bebizonyítottuk. ∎

A 2.3.9. tétel $s = 0$, $p = 1$, $q = -1$ speciális esete már szerepelt az 1.3.§-ban (1.3.10. példa), azaz az aritmetikai és harmonikus közép Gauss-féle kompozíciója a geometriai közép. Megjegyezzük, hogy a $H_1 \otimes H_0 = A \otimes G$ Gauss-féle aritmetikai-geometriai közép már nyilvánvalóan nem Hölder-közép (sőt nem is kváziaritmetikai). Ugyanis ha $A \otimes G$ kváziaritmetikai lenne $\mathbb{R}_+$-ban, akkor homogenitása miatt csakis Hölder-közép lehetne, de az előző tétel miatt $(s, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ nem teljesíti a (23) alatti feltételek egyikét sem, ezért $A \otimes G$ nem kváziaritmetikai közép $\mathbb{R}_+$-ban.

Az eredeti Matkowski–Sutô-probléma a következő kérdést jelentette. Legyen M_1 és M_2 két kváziaritmetikai közép I-ben és azt kérdezzük, hogy mikor lesz ezek Gauss-féle kompozíciója az aritmetikai közép, azaz mikor teljesül az

$$A(M_1, M_2) = A$$

invariancia egyenlet. Ez a probléma részletesen azt jelenti, hogy milyen $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ függvényekre teljesül az

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = x + y \tag{28}$$

függvényegyenlet. Tudomásunk szerint először 1914-ben O. Sutô ([63], [64]) vizsgálta a (28) egyenletet, amelyről a következőt írta: „The *analytic* functions φ, ψ and *their inverses* are supposed to be one-valued, as ever we do; $\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)$ is a *mean* of x and y in certain sense." 1995-ben a (28) függvényegyenletet Matkowski ([40]) újra felfedezte és sokkal egyértelműbb módon megfogalmazta az egyenletre vonatkozó következő problémát.

Matkowski–Sutô-probléma: Határozzuk meg mindazon $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ függvényeket, amelyekre teljesül a (28) függvényegyenlet minden $x, y \in I$-re.

A Matkowski–Sutô-probléma megoldása választ adna a következő általánosabb Matkowski–Sutô-típusú problémára is. *Határozzuk meg mindazon M_1, M_2, M_3 kváziaritmetikai közepeket I-ben, amelyekre teljesül az*

$$M_1 = M_2 \otimes M_3$$

azonosság, azaz a kváziaritmetikai M_2 és M_3 közepek Gauss-féle kompozíciója kváziaritmetikai közép I-ben.

3. A Matkowski–Sutô-probléma

3.1. Kváziaritmetikai közepekre vonatkozó Matkowski–Sutô-probléma. Legyen $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. Azt mondjuk, hogy a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár,* ha fennáll a

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right) = x + y \tag{29}$$

függvényegyenlet minden $x, y \in I$-re. Nyilvánvaló, hogy ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és $f \sim \varphi$, $g \sim \psi$ I-ben, akkor $(f, g) \in \mathcal{CM}(I)^2$ ugyancsak Matkowski–Sutô-pár, hiszen $A_\varphi = A_f$ és $A_\psi = A_g$ I^2-ben. Ezért a Matkowski–Sutô-párokat elegendő a generáló függvények ekvivalenciájától eltekintve meghatározni.

Az első eredményt Sutô ([64]) bizonyította.

3.1.1. tétel. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és φ, ψ analitikus függvények I-ben, akkor létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\varphi \sim \chi_p \qquad \text{és} \qquad \psi \sim \chi_{-p} \qquad I\text{-ben,} \tag{30}$$

ahol

$$\chi_p(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } p = 0 \\ e^{px}, & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \qquad (x \in I). \tag{31}$$

A következő eredmény Matkowskitól ([40]) származik, amely általánosabb Sutôénál.

3.1.2. tétel. *Ha* $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár és* φ, ψ *kétszer folytonosan differenciálható* I*-ben, akkor létezik* $p \in \mathbb{R}$*, hogy* (30) *teljesül.*

Az előző két tételt javította a [17] dolgozatunk eredménye.

3.1.3. tétel. *Ha* $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár, továbbá* φ *és* ψ *közül valamelyik egyszer folytonosan differenciálható* I*-ben, akkor létezik* $p \in \mathbb{R}$*, hogy* (30) *teljesül.*

Ezen eredmény után ebben az irányban már további enyhítést nem sikerült elérni. Egy másik lehetséges irány bemutatásához szükségünk lesz a következő definícióra.

3.1.4. definíció. Legyen $M, N : I^2 \to I$ két középérték. Azt mondjuk, hogy M és N *szigorúan összehasonlítható* I-ben, ha

$$M(x, y) \lhd N(x, y)$$

minden $x, y \in I$ és $x \neq y$ értékre, ahol $\lhd \in \{=, <, >\}$ a valós számok halmazán értelmezett reláció.

A fenti összehasonlíthatósági fogalom segítségével Daróczy és Maksa ([15]) a következő eredményt bizonyította.

3.1.5. tétel. *Ha* $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár és az* $M := A_\varphi$ *és* $N := A_\psi$ *kváziaritmetikai közepek szigorúan összehasonlíthatók* I*-ben, akkor létezik* $p \in \mathbb{R}$*, hogy* (30) *teljesül.*

A 3.1.3. és 3.1.5. tételek függetlenek egymástól a következő értelemben: nem tudjuk közvetlenül belátni, hogy ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és φ és ψ közül valamelyik folytonosan differenciálható I-ben, akkor A_φ és A_ψ szigorúan összehasonlítható I-ben; illetve, ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és A_φ és A_ψ szigorúan összehasonlítható I-ben, akkor φ és ψ közül valamelyik folytonosan differenciálható I-ben.

3.2. Folytonosan differenciálható megoldások. A következőkben feltesszük, hogy a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-párra teljesül, hogy φ, ψ folytonosan differenciálható I-ben és $\varphi'(x) \neq 0$ és $\psi'(x) \neq 0$, ha $x \in I$. Ez az eset valamivel speciálisabb, mint az eddig ismertetett 3.1.§. 3.1.3. tételben szereplő feltétel, de később látni fogjuk, hogy elegendő lesz a Matkowski–Sutô-probléma megoldásához.

3.2.6. tétel. *Ha* $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár és* φ, ψ *folytonosan differenciálható* I*-ben és* $\varphi'(x) \neq 0$*,* $\psi'(x) \neq 0$ *ha* $x \in I$*, akkor létezik* $p \in \mathbb{R}$*, hogy* (30) *teljesül.*

A 3.2.6. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmákra.

3.2.7. lemma. *Ha* $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár és* φ, ψ *folytonosan differenciálható* I*-ben és* $\varphi'(x) > 0$, $\psi'(x) > 0$, *ha* $x \in I$, *akkor a*

$$J := \varphi(I), \qquad f := \varphi' \circ \varphi^{-1}, \qquad g := \psi' \circ \varphi^{-1}$$

jelölésekkel az $f, g : J \to \mathbb{R}_+$ *folytonos függvényekre teljesül a*

$$2f\left(\frac{u+v}{2}\right)\big[g(v) - g(u)\big] = f(u)g(v) - f(v)g(u) \tag{32}$$

függvényegyenlet minden $u, v \in J$*-re.*

Bizonyítás. Differenciáljuk a (29) függvényegyenletet x szerint, majd y szerint. Ekkor a feltételek miatt ez lehetséges. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{\varphi'(x)}{2\varphi'\big(A_\varphi(x,y)\big)} + \frac{\psi'(x)}{2\psi'\big(A_\psi(x,y)\big)} = 1$$

és

$$\frac{\varphi'(y)}{2\varphi'\big(A_\varphi(x,y)\big)} + \frac{\psi'(y)}{2\psi'\big(A_\psi(x,y)\big)} = 1$$

teljesül minden $x, y \in I$-re. Az első egyenletet $\psi'(y)$-nal, a másodikat $\psi'(x)$-szel szorozva és a kapott egyenleteket egyemásból kivonva, kapjuk, hogy

$$\frac{\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x)}{2\varphi'\big(A_\varphi(x,y)\big)} = \psi'(y) - \psi'(x) \tag{33}$$

minden $x, y \in I$-re. Legyen most $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$ ($u, v \in J := \varphi(I)$) tetszőleges és $f := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $g := \psi' \circ \varphi^{-1}$, ekkor a (33) egyenletből

$$2f\left(\frac{u+v}{2}\right)\big[g(v) - g(u)\big] = f(u)g(v) - f(v)g(u)$$

adódik minden $u, v \in J$-re, azaz fennáll (32). Ebben az esetben a lemmában kimondott feltételek miatt az $f, g : J \to \mathbb{R}_+$ függvények folytonosak. ■

3.2.8. lemma. *Ha az* $f, g : J \to \mathbb{R}_+$ *folytonos függvényekre* ($J \subset \mathbb{R}$ *nemüres nyílt intervallum*) *teljesül a* (32) *függvényegyenlet minden* $u, v \in J$*-re, akkor létezik* $c > 0$ *konstans, hogy*

$$f(u)g(u) = c \tag{34}$$

minden $u \in J$*-re.*

Bizonyítás. Ha $g(u) = g(v)$ (> 0), akkor (32)-ből $f(u) = f(v)$, ezért létezik a $F : g(J) \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy

$$f(u) = F\big(g(u)\big) \quad \text{ha} \quad u \in J. \tag{35}$$

Ha g konstans J-ben, akkor f is konstans J-ben és (34) triviálisan teljesül. Ezért feltehetjük, hogy g nemkonstans J-ben. Ekkor g folytonossága miatt $K := g(J)$ valódi intervallum és $K \subset \mathbb{R}_+$.

Megmutatjuk, hogy az

$$F : K \to \mathbb{R}_+$$

függvény differenciálható K-ban.

Legyen $x \in K$ és $(x_n) \subset K$ olyan sorozat, amelyre $x_n \to x$ balról $(x_n < x)$ (vagy jobbról $x_n > x$). Elég megmutatni, hogy

$$\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x}$$

ugyanazon határértékhez tart, amely csak x-től függ.

Legyen

$$x_0 := \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\{x_n\}.$$

Ekkor létezik $u_0 \in J$, hogy $g(u_0) = x_0$ és $u^* \in J$, hogy $g(u^*) = x$. Feltehetjük, hogy $u_0 < u^*$ (a másik eset hasonlóan tárgyalható). Legyen

$$H := \big\{t \in J \mid u_0 \le t \le u^* \quad \text{és} \quad g(t) = x\big\}.$$

Ekkor H *zárt* halmaz és mivel $u^* \in H$, ezért $H \neq \emptyset$. Legyen

$$u := \inf H,$$

amelyre nyilvánvalóan $u > u_0$ teljesül. A g függvény folytonossága miatt $g(u) = x$ és ha $u_0 \le z < u$, akkor $g(t) \neq x$. A g függvény felvesz bármely értéket x és x_0 között az $[u_0, u]$ zárt intervallumban, ezért létezik $u_n \in [u_0, u[$, hogy $g(u_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Megmutatjuk, hogy $u_n \to u$ $(n \to \infty)$.

Ha ez nem állna fenn, akkor lenne olyan (u_{n_k}) $(n_1 < n_2 < n_3 < \cdots)$ részsorozat, amely $\bar{u} \neq u$-hoz tartana, amelyből $\bar{u} < u$ következne. Ekkor g folytonossága miatt $g(u_{n_k}) \to g(\bar{u})$ $(k \to \infty)$ és $g(u_{n_k}) = x_{n_k} \to x = g(u)$ $(k \to \infty)$. Ezekből $g(\bar{u}) = g(u)$ következne, ami ellentmond u definíciójának. Ezért $u_n \to u$ $(n \to \infty)$.

Az előzőekből és a (32) egyenletből

$$2f\left(\frac{u_n + u}{2}\right) = \frac{f(u_n)g(u) - f(u)g(u_n)}{g(u) - g(u_n)} =$$

$$= \frac{F(x_n)x - F(x)x_n}{x - x_n} = -x\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} + F(x).$$

Mivel f folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{u_n+u}{2}\right) = f(u) = F\big(g(u)\big) = F(x)$$

létezik, ezért létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} = F'(x)$$

határérték is és az előzőek miatt

$$2F(x) = -xF'(x) + F(x)$$

minden $x \in K$-ra. Ebből

$$\big(\ln F(x) + \ln x\big)' = 0$$

miatt létezik $c > 0$, hogy

$$F(x) = \frac{c}{x}.$$

Ebből (35) miatt következik a lemma állítása. ■

3.2.9. lemma. *Ha az $f : J \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvényre teljesül az*

$$\left[f\left(\frac{u+v}{2}\right) - \frac{f(u)+f(v)}{2}\right]\left[f(u)-f(v)\right] = 0 \tag{36}$$

függvényegyenlet minden $u, v \in J$-re, akkor létezik $p, q \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(u) = pu + q > 0 \quad \text{ha} \quad u \in J. \tag{37}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy (37) mindig megoldása (36)-nak (ahol $p = 0$ esetén $q > 0$). Ha f konstans, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ezért állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy létezik olyan $f : J \to \mathbb{R}_+$ nemkonstans folytonos megoldása (36)-nak, amely nem affin, azaz nem (37) alakú. Ekkor létezik $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in I$), hogy $f(\alpha) \neq f(\beta)$ és

$$\mathrm{Graf}\,(f) \not\equiv \mathrm{Graf}\,(L),$$

ahol

$$L(u) := \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}u - \frac{f(\beta)\alpha - f(\alpha)\beta}{\beta-\alpha} \qquad u \in J$$

és

$$\mathrm{Graf}\, f := \Big\{\big(u, f(u)\big) \mid u \in J\Big\}, \qquad \mathrm{Graf}\, L := \Big\{\big(u, L(u)\big) \mid u \in J\Big\}.$$

Világos, hogy

$$\big(\alpha, f(\alpha)\big), \big(\beta, f(\beta)\big) \in \mathrm{Graf}\,(f) \cap \mathrm{Graf}\,(L),$$

ezért f folytonossága miatt létezik $\alpha^* < \beta^*$ ($\alpha^*, \beta^* \in J$) hogy

$$\big(\alpha^*, f(\alpha^*)\big), \big(\beta^*, f(\beta^*)\big) \in \mathrm{Graf}\,(f) \cap \mathrm{Graf}\,(L),$$

és minden $t \in]\alpha^*, \beta^*[$ értékre $(t, f(t)) \notin \mathrm{Graf}(L)$. Például feltehetjük, hogy $f(t) > L(t)$, ha $t \in]\alpha^*, \beta^*[$ (a másik eset hasonlóan tárgyalható). Tegyünk most (36)-ban $u = \alpha^*$, $v = \beta^*$ értékeket. Ekkor $f(\alpha^*) \neq f(\beta^*)$ miatt kapjuk, hogy

$$L(\alpha^*) + L(\beta^*) = f(\alpha^*) + f(\beta^*) =$$
$$= 2f\left(\frac{\alpha^* + \beta^*}{2}\right) > 2L\left(\frac{\alpha^* + \beta^*}{2}\right) = L(\alpha^*) + L(\beta^*),$$

ami ellentmondás. ■

Most rátérünk a 3.2.6. tétel bizonyítására.

Bizonyítás. (3.2.6. tétel.) Feltehetjük, hogy $\varphi'(x) > 0$ és $\psi'(x) > 0$ minden $x \in I$-re. Ha például $\varphi'(x) < 0$ $(x \in I)$ lenne, akkor $\varphi \sim -\varphi$ I-ben miatt φ-t helyettesíthetjük $-\varphi$-vel, amelyre már a kívánt egyenlőtlenség teljesül. Ekkor a 3.2.7. lemma miatt $f := \varphi' \circ \varphi^{-1}$ és $g := \psi' \circ \psi^{-1}$ eleget tesz (32)-nek bármely $u, v \in J := \varphi(I)$-re. A 3.2.8. lemma miatt ekkor létezik $c > 0$, hogy (34) teljesül minden $u \in J$-re. Ebből a $g(u) = \frac{c}{f(u)}$ helyettesítéssel (32)-ből következik, hogy az $f : J \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény eleget tesz (36)-nak, ezért a 3.2.9. lemma miatt létezik $p, q \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(u) = pu + q > 0, \quad \text{ha} \quad u \in J.$$

Ezért

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}(u) = pu + q, \quad \text{ha} \quad u \in J,$$

ahonnan $x = \varphi^{-1}(u) \in I$ jelöléssel

(38) $$\varphi'(x) = p\varphi(x) + q, \quad \text{ha} \quad x \in I.$$

Ha most $p = 0$, akkor $q > 0$ miatt (38)-ból

$$\varphi(x) = qx + r, \quad \text{ha} \quad x \in I$$

valamely $r \in \mathbb{R}$ konstanssal. Ebből

(39) $$\varphi \sim \chi_0 \qquad I\text{-ben.}$$

Ha viszont $p \neq 0$, akkor (38)-ból

$$\varphi(x) = ce^{px} - \frac{q}{p}, \quad \text{ha} \quad x \in I$$

valamely $c \neq 0$ konstanssal, azaz

(40) $$\varphi \sim \chi_p \qquad I\text{-ben.}$$

Végül könnyű belátni, hogy ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és $\varphi \sim \chi_p$ I-ben, akkor $\psi \sim \chi_{-p}$ I-ben. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

3.3. Kiterjesztési tétel. Az eddigi vizsgálatok és eredmények további erősítését jelentette a *kiterjesztési tétel* megfogalmazása és bizonyítása. A bevezetésben már említettük a (29) függvényegyenlet szerkezetéből következő, az alábbiakban részletezett fontos tulajdonságot.

Legyen $K \subset I$ nemüres, nyílt intervallum. Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és

$$\varphi_1 : K \to \mathbb{R}, \qquad \psi_1 : K \to \mathbb{R}$$

leszűkítése φ-nek és ψ-nek K-ra, azaz

$$\varphi_1(x) := \varphi(x), \qquad \psi_1(x) := \psi(x), \quad \text{ha} \quad x \in K,$$

akkor a $(\varphi_1, \psi_1) \in \mathcal{CM}(K)^2$ pár Matkowski–Sutô-pár a K intervallumban, azaz (29) teljesül minden $x, y \in K$-ra. A $(\varphi_1, \psi_1) \in \mathcal{CM}(K)^2$ helyett a jövőben a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(K)^2$ jelölést használjuk.

Másrészt nyilvánvaló, hogy bármely $K \subset I$ nemüres nyílt intervallumon a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(K)^2$ pár Matkowski–Sutô-pár, ha $\varphi \sim \chi_p$ és $\psi \sim \chi_{-p}$ K-ban valamely $p \in \mathbb{R}$-re. Ebből a tényből adódik az alábbi természetes kérdésfelvetés. Legyen $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy φ, ψ K-beli megszorítására φ_1, ψ_1-re már teljesül, hogy

$$\varphi_1 \sim \chi_p, \qquad \psi_1 \sim \chi_{-p} \qquad K\text{-ban}$$

valamely $p \in \mathbb{R}$-re. Igaz-e, hogy ekkor $\varphi \sim \chi_p$ és $\psi \sim \chi_{-p}$ I-ben is teljesül? Ennek a kérdésnek a pozitív megválaszolása ugyanis általánosítja a 3.1.§. 3.1.3. és 3.1.5. tételét a következő formában.

3.3.10. tétel. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, hogy φ és ψ K-beli megszorítása közül az egyik folytonosan differenciálható K-ban, akkor létezik olyan $p \in \mathbb{R}$, hogy* (30) *teljesül.*

3.3.11. tétel. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, hogy az $M = A_\varphi$ és $N = A_\psi$ kváziaritmetikai közepek szigorúan összehasonlíthatók K-ban, akkor létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy* (30) *teljesül.*

A kiterjesztési tétel bizonyításához előrebocsájtunk néhány lemmát.

3.3.12. lemma. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, hogy $\varphi \sim \chi_p$ és $\psi \sim \chi_{-p}$ K-ban valamely $p \in \mathbb{R}$-re, akkor létezik olyan $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, hogy $\varphi \sim \widetilde{\varphi}$ és $\psi \sim \widetilde{\psi}$ I-ben és*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \chi_p(x), \qquad \widetilde{\psi}(x) = \chi_{-p}(x), \quad \text{ha} \quad x \in K.$$

Bizonyítás. Ekkor léteznek olyan $A_i \neq 0$ és B_i $(i = 1, 2)$ konstansok, hogy

$$\varphi(x) = A_1\chi_p(x) + B_1, \qquad \psi(x) = A_2\chi_{-p}(x) + B_2$$

minden $x \in K$-ra valamely $p \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen

$$\widetilde{\varphi}(x) := \frac{1}{A_1}\varphi(x) - \frac{B_1}{A_1} \qquad \text{és} \qquad \widetilde{\psi}(x) := \frac{1}{A_2}\psi(x) - \frac{B_2}{A_2}, \quad \text{ha} \quad x \in I.$$

Ekkor $\varphi \sim \widetilde{\varphi}$ és $\psi \sim \widetilde{\psi}$ miatt $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és bármely $x \in K$-ra

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{A_1}\left[A_1\chi_p(x) + B_1\right] - \frac{B_1}{A_1} = \chi_p(x),$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \frac{1}{A_2}\left[A_2\chi_{-p}(x) + B_2\right] - \frac{B_2}{A_2} = \chi_{-p}(x). \qquad \blacksquare$$

3.3.13. lemma. *Legyen* $\varphi : [A, B] \to \mathbb{R}$ $(A < B)$ *folytonos és szigorúan monoton növekvő függvény, amelyre*

$$\tau := \frac{B - A}{\varphi(B) - \varphi(A)} \geq 1 \tag{41}$$

teljesül. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$f(t) := \varphi(t) - t \qquad \big(t \in [A, B]\big) \tag{42}$$

függvényre teljesül az

$$f\big(x + y - A_\varphi(x, y)\big) = f\big(A_\varphi(x, y)\big) \tag{43}$$

függvényegyenlet minden $x, y \in [A, B]$*-re. Ekkor létezik* $\sigma \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\tau}x + \sigma \tag{44}$$

minden $x \in [A, B]$*-re.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy a (43) függvényegyenlet valójában a φ ismeretlen függvényre vonatkozó összefüggés.

Legyen $\varphi\big([A, B]\big) = [\alpha, \beta]$, ahol $\varphi(A) = \alpha$ és $\varphi(B) = \beta$ és mivel φ szigorúan növekvő, ezért $\alpha < \beta$. Legyen továbbá

$$g(u) := \varphi^{-1}(u) \quad \text{ha} \quad u \in [\alpha, \beta]. \tag{45}$$

Ekkor (43)-ból az $x := \varphi^{-1}(u)$, $y := \varphi^{-1}(v)$ helyettesítéssel

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v) - \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) - \varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= \frac{u+v}{2} - \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

minden $u, v \in [\alpha, \beta]$-ra, ahonnan

$$(46) \qquad g(u) + g(v) - g\left(\frac{u+v}{2}\right) = g\left(g(u) + g(v) - 2g\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{u+v}{2}\right).$$

Legyen most

$$(47) \qquad b(u) := \frac{B-A}{\beta-\alpha}u + \frac{A\beta - B\alpha}{\beta-\alpha} - g(u)$$

ha $u \in [\alpha, \beta]$. Könnyen látható, hogy

$$(48) \qquad b(\alpha) = b(\beta) = 0$$

és (41) miatt

$$(49) \qquad \tau := \frac{B-A}{\beta-\alpha} \geq 1.$$

Ezért (47)-ből $g(u) = \tau u + \eta - b(u)$ ($\eta := \frac{A\beta-B\alpha}{\beta-\alpha}$), azaz (46)-ból kapjuk, hogy

$$\tau u + \eta - b(u) + \tau v + \eta - b(v) - \tau\frac{u+v}{2} - \eta + b\left(\frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= g\Bigg(\tau u + \eta - b(u) + \tau v + \eta - b(v) -$$

$$-2\left(\tau\frac{u+v}{2} + \eta - b\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) + \frac{u+v}{2}\Bigg) =$$

$$= g\left(2b\left(\frac{u+v}{2}\right) - b(u) - b(v) + \frac{u+v}{2}\right)$$

minden $u, v \in [\alpha, \beta]$-ra. Átrendezve az előbbi egyenletet, kapjuk, hogy

$$(50) \qquad \begin{aligned} &b\left(2b\left(\frac{u+v}{2}\right) - b(u) - b(v) + \frac{u+v}{2}\right) = \\ &= (1-\tau)b(u) + (1-\tau)b(v) + (2\tau - 1)b\left(\frac{u+v}{2}\right) \end{aligned}$$

minden $u, v \in [\alpha, \beta]$-ra, ahol (49) miatt $\tau \geq 1$. Az ismeretlen $b : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és eleget tesz (48)-nak és (50)-nek. Megmutatjuk, hogy $b(u) = 0$ minden $u \in [\alpha, \beta]$ esetén.

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy létezik $v_0 \in]\alpha, \beta[$, hogy $b(v_0) \neq 0$. Ekkor két eset lehetséges: (i) $b(v_0) > 0$ vagy (ii) $b(v_0) < 0$.

Az (i) esetben legyen

$$\max_{u \in [\alpha, \beta]} b(u) = M > 0$$

és

$$S := \{u \mid u \in [\alpha, \beta],\ b(u) = M\},$$

továbbá

$$\sup S = u_0.$$

Ekkor $b(u_0) = M$ és $u_0 < \beta$. Ezért létezik $\varepsilon > 0$ hogy $u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon \in]\alpha, \beta[$. (50)-be helyettesítsünk $u := u_0 - \varepsilon$ és $v := u_0 + \varepsilon$ értékeket, ekkor kapjuk a

$$\begin{aligned} &b\big(2M - b(u_0 - \varepsilon) - b(u_0 + \varepsilon) + u_0\big) = \\ &\qquad = (1 - \tau)b(u_0 - \varepsilon) + (1 - \tau)b(u_0 + \varepsilon) + (2\tau - 1)M \end{aligned}$$

egyenletet. Az u_0 szám definíciója szerint

$$v(\varepsilon) := 2M - b(u_0 - \varepsilon) - b(u_0 + \varepsilon) > 0,$$

ezért az előző egyenletből

$$(51) \qquad \begin{aligned} b\big(v(\varepsilon) + u_0\big) &= (1 - \tau)\big(2M - v(\varepsilon)\big) + (2\tau - 1)M = \\ &= M + (\tau - 1)v(\varepsilon) \end{aligned}$$

következik. Az (51) egyenlet $\tau > 1$ esetén ellentmondást jelent, mivel a b függvény maximuma M és $v(\varepsilon) > 0$. Ha $\tau = 1$, akkor (51) miatt $u_0 + v(\varepsilon) \in S$ és $u_0 + v(\varepsilon) > > u_0$, amely viszont ellentmond u_0 definíciójának. Ezért az (i) eset nem lehetséges.

Ha viszont (ii) teljesül, akkor legyen

$$\min_{u \in [\alpha, \beta]} b(u) = m < 0$$

és

$$T := \{u \mid u \in [\alpha, \beta],\ b(u) = m\},$$

továbbá

$$\inf T = u_0.$$

Ekkor $b(u_0) = m$ és $\alpha < u_0$. Ezért létezik $\varepsilon > 0$ hogy $u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon \in]\alpha, \beta[$. Helyettesítsünk most (50)-be $u := u_0 - \varepsilon$ és $v := u_0 + \varepsilon$ értékeket, ekkor kapjuk a

$$\begin{aligned} &b\big(2m - b(u_0 - \varepsilon) - b(u_0 + \varepsilon) + u_0\big) = \\ &\qquad = (1 - \tau)\big(b(u_0 - \varepsilon) + b(u_0 + \varepsilon)\big) + (2\tau - 1)m \end{aligned}$$

egyenletet. Az u_0 szám értelmezése miatt kapjuk, hogy

$$v(\varepsilon) := 2m - b(u_0 - \varepsilon) - b(u_0 + \varepsilon) < 0,$$

és az előző egyenletből

$$b\big(u_0 + v(\varepsilon)\big) = m + (1 - \tau)v(\varepsilon).$$

Ha most $\tau > 1$, akkor az előző egyenletből az következne, hogy b kisebb értéket is felvesz, mint m, ami viszont lehetetlen. Ha $\tau = 1$, akkor $v(\varepsilon) < 0$ miatt $u_0 + v(\varepsilon) < u_0$, és ebben a pontban b az m értéket venné fel, amely ellentmond u_0 értelmezésének. Ezért a (ii) eset is ellentmondásra vezet.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $b(u) = 0$ minden $u \in [\alpha, \beta]$-ra. Ebből (47), (49) és (45) miatt

$$\varphi^{-1}(u) = g(u) = \tau u + \eta, \quad \text{ha} \quad u \in [\alpha, \beta],$$

ahonnan a $\sigma := -\frac{\eta}{\tau}$ jelöléssel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\tau}x + \sigma, \quad \text{ha} \quad x \in [A, B],$$

azaz (44) teljesül. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. ∎

Ezek után kimondhatjuk a kiterjesztési tételt ([16]).

3.3.14. tétel. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár és létezik egy nemüres nyílt intervallum $K \subset I$ és $p \in \mathbb{R}$, hogy $\varphi \sim \chi_p$ és $\psi \sim \chi_{-p}$ K-ban, akkor $\varphi \sim \chi_p$ és $\psi \sim \chi_{-p}$ I-ben.*

Bizonyítás. A 3.3.12. lemma miatt feltehetjük, hogy

$$(52) \qquad \varphi(x) = \chi_p(x) \quad \text{és} \quad \psi(x) = \chi_{-p}(x), \quad \text{ha} \quad x \in K,$$

továbbá még azt is feltehetjük, hogy a K nyílt intervallum maximális, azaz nincsen tőle valódian bővebb olyan nyílt intervallum amelyen teljesülnek a fenti egyenlőségek. Célunk annak a kimutatása, hogy ekkor K megegyezik I-vel.

Legyen $K =]a, b[$ és tételezzük fel, hogy $K \neq I$. Ekkor a vagy b vagy mindkettő eleme I-nek. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor $a \in I$, mivel a többi eset ehhez hasonló. Válasszunk egy tetszőleges $a < b^* < b$ értéket.

A folytonosság és szigorú monotonitás miatt létezik $0 < \delta < b^* - a$, amelyre

$$(53) \qquad \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \in \varphi(K) \quad \text{és} \quad \frac{\psi(x) + \psi(y)}{2} \in \psi(K)$$

teljesül minden $x \in [a - \delta, a] \subset I$ és $y \in]b^* - \delta, b^*[\subset I$ értékre.

Ezek után két eset lehetséges: (i) $p \neq 0$ és (ii) $p = 0$.

Az (i) eset relatíve könnyűnek bizonyul. Ekkor (52) miatt

$$(54) \qquad \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{p}\log t, \quad \text{ha} \quad t \in \varphi(K) \subset \mathbb{R}_+$$

és

$$(55) \qquad \psi^{-1}(t) = \frac{1}{p}\log t, \quad \text{ha} \quad t \in \psi(K) \subset \mathbb{R}_+.$$

Felhasználva az (52), (54) és (55) összefüggéseket (53) miatt a Matkowski–Sutô-párt definiáló függvényegyenletből

$$\frac{1}{p}\log\frac{\varphi(x)+e^{py}}{2}-\frac{1}{p}\log\frac{\psi(x)+e^{-py}}{2}=x+y \tag{56}$$

következik minden $x\in[a-\delta,a]$ és $y\in\,]b^*-\delta,b^*[$ értékre. (56)-ból

$$e^{py}\left[e^{px}\psi(x)-1\right]=\varphi(x)-e^{px}$$

következik, amelyből

$$e^{px}\psi(x)-1=0$$

adódik minden $x\in[a-\delta,a]$ értékre, azaz $\psi(x)=e^{-px}$ és $\varphi(x)=e^{px}$, ha $x\in[a-\delta,a]$. Ez azt jelenti, hogy az (52) alakú megoldásokat $K=\,]a,b[$-ről a $K_1:=\,]a-\delta,b[\,\subset I$ nyílt intervallumra folytathatjuk, amely valódi módon tartalmazza K-t, ez pedig ellentmond a K maximalitásának. Ezzel az (i) eset bizonyítását befejeztük.

A (ii) eset vizsgálata nehezebbnek bizonyul. Ekkor (52)-ből

$$\varphi(x)=\psi(x)=x \quad \text{ha} \quad x\in K=\,]a,b[\,. \tag{57}$$

A φ és ψ függvények szerepe ekkor felcserélhető és $a\in I$ miatt a folytonosságból

$$\varphi(a)=\psi(a)=a. \tag{58}$$

Másrészt minden $x\in[a-\delta,a]$ és $y\in[b^*-\delta,b^*[$ értékre (53)-ból és a (φ,ψ) Matkowski–Sutô-párt definiáló egyenletből (57) miatt

$$\frac{\varphi(x)+y}{2}+\frac{\psi(x)+y}{2}=x+y$$

következik, azaz

$$\varphi(x)+\psi(x)=2x, \quad \text{ha} \quad x\in K=[a-\delta,a]. \tag{59}$$

Most (57) miatt φ és ψ *szigorúan növekvő* I-ben, tehát az $[a-\delta,a]$ intervallumban is. Legyen $\varphi(a-\delta)=:c$ és $\psi(a-\delta)=:C$. Ekkor (59) miatt $c+C=2(a-\delta)$, ezért vagy c vagy C nagyobb vagy egyenlő, mint $a-\delta$, mivel ha ez nem igaz, akkor $c<a-\delta$ és $C<a-\delta$ teljesülne, amiből $c+C<2(a-\delta)$ ellentmondásra vezet. Mivel φ és ψ szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy

$$\varphi(a-\delta)=c\geq a-\delta. \tag{60}$$

Legyen most $x,y\in[a-\delta,a]$ tetszőleges. Ekkor (59) és Matkowski–Sutô-egyenlet miatt

$$\psi^{-1}\left(\frac{2x-\varphi(x)+2y-\varphi(y)}{2}\right)=x+y-A_\varphi(x,y),$$

amelyből még egyszer alkalmazva az (59) összefüggést kapjuk, hogy

$$x + y - \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} = 2x + 2y - 2A_\varphi(x, y) - \varphi\big(x + y - A_\varphi(x, y)\big)$$

teljesül minden $x, y \in [a - \delta, a]$-ra. Átrendezve a fenti egyenletet és bevezetve az

$$f(t) := \varphi(t) - t, \quad \text{ha} \quad t \in [a - \delta, a]$$

függvényt kapjuk, hogy

$$f\big(x + y - A_\varphi(x, y)\big) = f\big(A_\varphi(x, y)\big) \tag{61}$$

minden $x, y \in [a - \delta, a]$ értékre. (58) és (60) miatt

$$\tau := \frac{a - (a - \delta)}{\varphi(a) - \varphi(a - \delta)} = \frac{\delta}{a - c} \geq 1.$$

Ezért a φ szigorúan növekvő és folytonos függvény az $[a - \delta, a] =: [A, B]$ zárt intervallumban teljesíti a 3.3.13. lemma feltételeit, amiből következik, hogy

$$\varphi(x) = \frac{1}{\tau}x + \sigma, \quad \text{ha} \quad x \in [a - \delta, a], \tag{62}$$

ahol $\sigma := a - \frac{a}{\tau}$. Ebből és (59)-ből

$$\psi(x) = 2x - \varphi(x) = \left(2 - \frac{1}{\tau}\right)x - \sigma, \quad \text{ha} \quad x \in [a - \delta, a]$$

következik.

Legyen most $x \in [a - \delta, a]$ és $y \in [a, b^*]$ olyan, amelyre $\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \in \varphi\big([a - \delta, a]\big)$ és $\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2} \in \psi\big([a - \delta, a]\big)$. Ekkor

$$\varphi^{-1}(s) = \tau(s - \sigma) \qquad \text{és} \qquad \psi^{-1}(s) = \frac{\tau}{2\tau - 1}(s + \sigma)$$

miatt a Matkowski–Sutô-egyenletből kapjuk, hogy

$$\tau\left(\frac{\frac{1}{\tau}x + \sigma + y}{2} - \sigma\right) + \frac{\tau}{2\tau - 1}\left(\frac{\left(2 - \frac{1}{\tau}\right)x - \sigma + y}{2} + \sigma\right) = x + y,$$

amelyből

$$\left(\tau + \frac{\tau}{2\tau - 1}\right)y + \left(\frac{\tau}{2\tau - 1} - \tau\right)\sigma = 2y$$

következik. Mivel ez utóbbi egyenlet minden, valamely intervallumból származó y értékre teljesül, ezért

$$\tau + \frac{\tau}{2\tau - 1} = 2$$

szükségképpen, azaz $\tau = 1$ és $\sigma = 0$. Ezért

$$\varphi(x) = \psi(x) = x, \quad \text{ha} \quad x \in [a - \delta, a],$$

azaz a megoldásokat $K =]a, b[$-ből $K_1 =]a - \delta, b[$-re kiterjeszthetjük, ahol K valódi részhalmaza K_1-nek. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ∎

4. A Matkowski–Sutô-probléma megoldása

4.1. Regularitási kérdések és Hilbert ötödik problémája. Hilbert ötödik problémája ([24]) a következő címet viseli: Lie koncepciója transzformációk folytonos csoportjáról azon függvények differenciálhatósági feltételezése nélkül, amelyek a csoportot definiálják. (Lie's concept of a continous group of transformations without the assumption of the differentiability of the functions defining the group.) Hilbert a probléma általánosságára utal, amikor lényegében azt kérdezi, hogy a folytonos transzformáció csoportot leíró függvények olyan függvényegyenleteknek tesznek eleget, amelyekben az ismeretlen függvényekről a differenciálhatóságot nem kell feltételezni, mert elegendőnek tűnik azok folytonossága.

Mármost véleményünk szerint a Matkowski–Sutô-probléma felfogható, mint Hilbert ötödik problémájának egy speciális esete. Ugyanis a probléma a következő módon is megfogalmazható.

Legyen $X \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallum, amelyben értelmezve van három *binér művelet* $\circ_i : X^2 \to X$ $(i = 1, 2, 3)$, amelyek mindegyike a következő $\mathcal{QA}(X)$ tulajdonsággal rendelkezik: Akkor mondjuk, hogy $\circ : X^2 \to X$ $\mathcal{QA}(X)$ tulajdonsággal rendelkezik rendelkezik, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

(QA1) $\circ : X^2 \to X$ folytonos;

(QA2) $\circ$ kommutatív $(x \circ y = y \circ x)$;

(QA3) $\circ$ reflexív $(x \circ x = x)$;

(QA4) $\circ$ leosztható $(x \circ y = x \circ z$ esetén $y = z)$;

(QA5) $\circ$ biszimmetrikus $((x \circ y) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (y \circ v))$.

Mármost a Matkowski–Sutô-problémát a következő módon fogalmazhatjuk meg.

Melyek az $\circ_1$, $\circ_2$ és $\circ_3$ $\mathcal{QA}(X)$-be tartozó binér műveletek X-en, amelyekre teljesül az

$$a \circ_1 b = (a \circ_2 b) \circ_1 (a \circ_3 b) \tag{63}$$

azonosság minden $a, b \in X$-re.

Mármost Aczél ([2]) tétele miatt $\circ : X^2 \to X$ akkor és csak akkor $\mathcal{QA}(X)$-beli, ha létezik $f \in \mathcal{CM}(X)$, hogy

$$a \circ b = f^{-1}\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}\right) = A_f(a, b)$$

minden $a, b \in X$-re, azaz $\circ : X^2 \to X$ kváziaritmetikai közép. Ebből adódik, hogy a (63) „invariancia" egyenlet a következőt jelenti. Mivel $\circ_i$ minden i-re kváziaritmetikai közép, ezért léteznek $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{CM}(X)$ generáló függvények, hogy

$$A_{f_1}(a, b) = A_{f_1}\left[A_{f_2}(a, b), A_{f_3}(a, b)\right] \tag{64}$$

teljesül minden $a, b \in X$-re, azaz $A_{f_1} = A_{f_2} \otimes A_{f_3}$. (64)-ből

$$f_1(a) + f_1(b) = f_1\left[A_{f_2}(a,b)\right] + f_1\left[A_{f_3}(a,b)\right]$$

következik minden $a, b \in X$-re, ahonnan

$$x := f_1(a), \qquad y := f_1(b), \qquad x, y \in f_1(X) =: I$$

helyettesítéssel $I \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallum és a $\varphi := f_2 \circ f_1^{-1}$, $\psi := f_3 \circ f_1^{-1}$ jelölésekkel $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$, amelyekre

$$x + y = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) \tag{65}$$

teljesül minden $x, y \in I$-re. Ezért a (63) probléma megoldása vissza van vezetve a (65) problémára, amelyben a φ, ψ függvényekről Hilbert kérdésének megfelelően már további feltételek kiszabása nem természetes. Ezért fontos, elvi jelentőségű kérdésnek tartjuk a (65) függvényegyenlet megoldásainak tanulmányozását a természetes $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ feltételek mellett.

Az eddigi vizsgálatok szerint a Matkowski–Sutô-probléma meg van oldva, ha létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, amelyben a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár folytonosan differenciálható és a differenciálhányadosok nem veszik fel a 0-t K-ban.

Amennyiben sikerül belátnunk, hogy bármely $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár esetén teljesül az előbbi *regularitási* tulajdonság, akkor a problémát megoldottuk. Ezt fogjuk a következőkben megmutatni és ez igazolja Hilbert ötödik problémájának mélységét ebben a speciális esetben.

4.2. A Matkowski–Sutô-párok lokálisan Lipschitz-tulajdonsága. Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, akkor a

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = x + y \qquad (x, y \in I)$$

egyenletből $J := \varphi(I)$ jelöléssel és az $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$ $(u, v \in J)$ helyettesítésekkel

$$\psi^{-1}\left(\frac{\psi \circ \varphi^{-1}(u) + \psi \circ \varphi^{-1}(v)}{2}\right) = \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v) - \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{66}$$

minden $u, v \in J$-re. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ függvények szigorúan monoton *növekvők* I-ben, mert csökkenő esetben (-1)-szeresüket véve helyettesíthetők ekvivalens és növekvő generátorfüggvénnyel. Ekkor tehát φ, ψ szigorúan monoton növekvő I-ben és φ^{-1}, ψ^{-1} ugyancsak szigorúan monoton nő $J := \varphi(I)$-ben, illetve $L := \psi(I)$-ben, ahol J és L nemüres nyílt intervallumok $\mathbb{R}$-ben. Ebből adódik, hogy (66) baloldala, azaz az

$$u \mapsto \psi^{-1}\left(\frac{\psi \circ \varphi^{-1}(u) + \psi \circ \varphi^{-1}(v)}{2}\right) \qquad (u \in J)$$

függvény *szigorúan monoton nő* a J intervallumban bármely rögzített $v \in J$ mellett. Ebből következik, hogy (66) jobboldala is szigorúan monoton nő u-ban, azaz az

$$(67)\qquad u \mapsto \varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad (u \in J)$$

függvény *szigorúan monoton növekvő* a J intervallumban *bármely* $v \in J$ mellett. Természetesen φ^{-1} *folytonos* is J-ben. Ez a meggondolás *további* információt hordoz a φ^{-1} (és teljesen hasonlóan a ψ^{-1}) függvényről. Ezért alapvető a következő

4.2.1. tétel. *Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és $f : J \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő és folytonos függvény, amelyre teljesül, hogy bármely $v \in J$ esetén az*

$$(68)\qquad v \mapsto f(u) - f\left(\frac{u+v}{2}\right) \qquad (u \in J)$$

függvény szigorúan monoton nő.

Ekkor bármely $u_0 \in J$ esetén létezik $\delta > 0$ és $K, L > 0$, hogy $U :=$ $:=]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\subset J$ és bármely $u, v \in U$, $u \neq v$ esetén

$$(69)\qquad 0 < K \leq \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq L.$$

Bizonyítás. (i) Ekkor $u \leq u'$ $(u, u' \in J)$ esetén

$$f(u) - f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq f(u') - f\left(\frac{u'+v}{2}\right),$$

azaz

$$0 \leq f\left(\frac{u'+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq f(u') - f(u).$$

Ebből

$$(70)\qquad \left|f\left(\frac{u'+v}{2}\right) - f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right| \leq |f(u') - f(u)|$$

bármely $u, u', v \in J$-re.

Legyen $u_0 \in J$ tetszőleges. Ekkor létezik $r > 0$, hogy $]u_0 - r, u_0 + r[\subset J$. Mivel f monoton, ezért Lebesgue tétele miatt van olyan $u^* \in]u_0 - \frac{r}{2}, u_0 + \frac{r}{2}[$, amely pontban f differenciálható. Ebből adódik, hogy létezik olyan $0 < \varrho < \frac{r}{2}$, hogy $|u - u^*| < \varrho$ $(u, u^* \in J$, $u \neq u^*)$ esetén

$$\left|\frac{f(u) - f(u^*)}{u - u^*} - f'(u^*)\right| \leq 1,$$

azaz

$$(71)\qquad |f(u) - f(u^*)| \leq \left(|f'(u^*)| + 1\right)|u - u^*| = L^*|u - u^*|,$$

ahol $L^* := |f'(u^*)| + 1$. Nyilvánvaló, hogy (71) minden $|u - u^*| < \varrho$ esetén teljesül.

Legyen most $x, y \in \,]u_0 - \frac{\varrho}{4}, u_0 + \frac{\varrho}{4}[\, \subset J$ tetszőleges. Ekkor $v := 2y - u^*$ és $u := 2x - v = 2(x - y) + u^*$ jelöléssel

$$|v - u_0| = |2y - u^* - u_0| \leq |2(y - u_0)| + |u_0 - u^*| <$$
$$< 2\frac{\varrho}{4} + \frac{r}{2} = \frac{\varrho}{2} + \frac{r}{2} < r,$$

azaz $v \in J$ és

$$|u - u^*| = |2(x - y)| < 2\frac{\varrho}{2} = \varrho.$$

Ebből (70) és (71) alapján

$$|f(x) - f(y)| = \left|f\left(\frac{u+v}{2}\right) - f\left(\frac{u^*+v}{2}\right)\right| \leq$$
$$\leq |f(u) - f(u^*)| \leq L^*|u - u^*| = 2L^*|x - y|,$$

azaz $\delta := \frac{\varrho}{4}$ és $L := 2L^*$ jelöléssel a (69) egyenlőtlenség jobboldalát bebizonyítottuk.

(ii) A (69) egyenlőtlenség baloldalának bizonyításához szükségünk lesz a következő megjegyzésre. Mivel $f : J \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő, ezért f' J-nek egy sűrű részhalmazán létezik és pozitív. Ha ugyanis f' egy $H \subset J$ nemüres nyílt intervallumon majdnem mindenütt nulla lenne, akkor az (i) részben igazoltak szerint f abszolút folytonos, tehát

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = 0 \qquad (x, y \in H)$$

teljesülne, azaz f nem lehetne szigorúan monoton.

Legyen tehát $u_0 \in J$ és $r > 0$ olyan, hogy $]u_0 - r, u_0 + r[\, \subset J$. Legyen $u^* \in \,]u_0 - \frac{r}{3}, u_0 + \frac{r}{3}[$ olyan pont, amelyben f differenciálható és

$$f'(u^*) > 0.$$

Ekkor létezik olyan $0 < \varrho < \frac{r}{3}$, hogy $|u - u^*| < \varrho$ $(u \neq u^*)$ esetén

$$\left|\frac{f(u) - f(u^*)}{u - u^*} - f'(u^*)\right| \leq \frac{f'(u^*)}{2}.$$

Ebből az egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$|f(u) - f(u^*)| \geq \frac{f'(u^*)}{2}|u - u^*| \tag{72}$$

minden $|u - u^*| < \varrho$ esetén.

Legyen most $u, u' \in]u_0 - \varrho, u_0 + \varrho[$ és $v := 2u^* - u$. Ekkor

$$|v - u_0| = |2u^* - u - u_0| = \left|2(u^* - u_0) + u_0 - u\right| \leq$$

$$\leq 2|u^* - u_0| + |u_0 - u| \leq 2\frac{r}{3} + \varrho < r,$$

azaz $v \in J$. Ezért (70) és (72) alapján

$$\left|\frac{u' - u + 2u^*}{2} - u^*\right| = \frac{|u' - u|}{2} < \frac{2\varrho}{2} = \varrho$$

miatt

$$|f(u') - f(u)| \geq \left|f\left(\frac{u' + v}{2}\right) - f\left(\frac{u + v}{2}\right)\right| =$$

$$= \left|f\left(\frac{u' - u + 2u^*}{2}\right) - f(u^*)\right| \geq$$

$$\geq \frac{f'(u^*)}{2}\left|\frac{u' - u + 2u^*}{2} - u^*\right| = \frac{f'(u^*)}{4}|u' - u|.$$

Ebből adódik, hogy $\delta := \varrho$ és $K := \frac{f'(u^*)}{4}$ választással (69) baloldala is teljesül. ■

4.2.2. definíció. Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallum és $f : J \to \mathbb{R}$. Az f függvényt *lokálisan Lipschitz* tulajdonságúnak nevezzük értelmezési halmazán, ha bármely $u_0 \in J$ esetén létezik $\delta > 0$ és $L > 0$ konstans, hogy $U :=]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\subset$ $\subset J$ és bármely $u, v \in U$ esetén

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|. \tag{73}$$

4.2.3. tétel. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, akkor $\varphi, \psi, \varphi^{-1}, \psi^{-1}$ lokálisan Lipschitz-függvények értelmezési intervallumjaikban.*

Bizonyítás. Ha φ és ψ növekvőek, akkor (67) miatt $\varphi^{-1} : J \to \mathbb{R}$ eleget tesz a 4.2.1. tétel feltételeinek. Ezért bármely $u_0 \in J$ esetén létezik $\delta > 0$ és $K, L > 0$, hogy $U :=]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\subset J$ és bármely $u, v \in U$, $u \neq v$ esetén

$$0 < K \leq \frac{\varphi^{-1}(u) - \varphi^{-1}(v)}{u - v} \leq L.$$

Ennek jobboldalából adódik, hogy $\varphi^{-1} : J \to I$ lokálisan Lipschitz-tulajdonságú az L Lipschitz-konstanssal. Az egyenlőtlenség baloldalából pedig következik, hogy $\varphi :$ $I \to J$ lokálisan Lipschitz-tulajdonságú az $\frac{1}{K} > 0$ Lipschitz-konstanssal. Mivel φ és ψ szerepe felcserélhető, kapjuk, hogy ψ^{-1} és ψ is lokálisan Lipschitz-tulajdonságú függvények értelmezési intervallumjaikban. Ha φ és ψ közül valamelyik csökkenő, akkor azt helyettesítve (-1)-szeresükkel kapjuk, hogy ez is lokálisan Lipschitz-tulajdonságú. ■

4.2.4. következmény. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, akkor azon $x_0 \in I$ pontokban, amelyekben φ (vagy ψ) differenciálható, szükséges, hogy $\varphi'(x_0) \neq$ $\neq 0$ (vagy $\psi'(x_0) \neq 0$) legyen.*

Bizonyítás. Ha φ és ψ növekvő, akkor létezik $\delta > 0$ és $K > 0$, hogy $U :=$ $:=]u_0 - \delta, u_0 + \delta[\subset J$ és bármely $x, y \in U$, $x \neq y$ esetén

$$0 < K \leq \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}.$$

Ebből $y = x_0$ választással kapjuk, hogy

$$0 < K \leq \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0).$$

Hasonló a bizonyítás csökkenő φ esetén. ∎

4.3. A Matkowski–Sutô-párok differenciálhatósága. Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, akkor az előző paragrafus eredménye szerint a φ, ψ, φ^{-1} és ψ^{-1} függvények értelmezési intervallumaikon lokálisan Lipschitz-tulajdonságúak. Ebből adódik, hogy például $h := \psi \circ \varphi^{-1}$ is lokálisan Lipschitz-tulajdonságú függvény a $J := \varphi(I)$ intervallumban. Ebből következik, hogy $h \in \mathcal{CM}(I)$ „nullhalmaztartó", azaz bármely $E \subset J$ mérhető és nullmértékű halmaz $h(E)$ képe is nullmértékű (Natanson, [44]). Ez a tulajdonság alapvető szerepet játszik a következő vizsgálatokban.

4.3.5. definíció. Legyen $f : J \to \mathbb{R}$ ($J \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallum) tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy $t \in J$ az f *szimmetria pontja*, jelölésben $t \in \sigma(f)$, ha bármely $s \in J_t := (J - t) \cap (t - J)$ esetén

$$f(t+s) + f(t-s) = 2f(t). \tag{74}$$

4.3.6. lemma. *Ha $f : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f szimmetria pontjainak halmaza zárt J-ben.*

Bizonyítás. Legyen t_n f szimmetria pontjainak egy $t_0 \in J$-hez konvergáló sorozata. Megmutatjuk, hogy ekkor t_0 is szimmetria pontja f-nek.

Legyen $s \in J_{t_0} = (J - t_0) \cap (t_0 - J)$. Ekkor J nyíltsága miatt $s \in (J - t_n) \cap$ $\cap (t_n - J) = J_{t_n}$, tehát

$$f(t_n + s) + f(t_n - s) = 2f(t_n),$$

ha n elég nagy. Végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet és kihasználva az f folytonosságát is nyerjük, hogy t_0 az f szimmetriapontja. ∎

4.3.7. tétel. *Ha* $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ *Matkowski–Sutô-pár és a* $J := \varphi(I)$ *jelöléssel* $t_0 \in J$ *nem szimmetria pontja* φ^{-1}*-nek, azaz* $t_0 \notin \sigma(\varphi^{-1})$*, akkor* φ^{-1} *differenciálható* t_0*-ban.*

Bizonyítás. Az $x := \varphi^{-1}(t+s)$, $y := \varphi^{-1}(t-s)$ helyettesítéssel bármely $t \in J := := \varphi(I)$ és $s \in J_t := (J-t) \cap (t-J)$ esetén a (29) egyenletből

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(t+s) + \varphi^{-1}(t-s) - \psi^{-1}\left(\frac{h(t+s)+h(t-s)}{2}\right) \tag{75}$$

következik, ahol $h := \psi \circ \varphi^{-1}$. Ha $t \in \sigma(h)$, akkor (75)-ből $t \in \sigma(\varphi^{-1})$. Másrészt $t \in \sigma(\varphi^{-1})$ esetén (75) miatt $t \in \sigma(h)$. Ezért

$$\sigma(h) = \sigma(\varphi^{-1}).$$

Legyen most $t_0 \notin \sigma(\varphi^{-1})$. Ha $g : J_{t_0} \to \mathbb{R}$ valamely függvény, akkor jelölje N_g azon $s \in J_{t_0}$ pontok halmazát, amely pontokban g *nem differenciálható.* Legyen $s \in J_{t_0}$-ra

$$g_1(s) := \varphi^{-1}(t_0+s),$$

$$g_2(s) := \varphi^{-1}(t_0-s),$$

$$g_3(s) := h(t_0+s),$$

$$g_4(s) := h(t_0-s).$$

Ekkor a g_i $(i = 1,2,3,4)$ függvények monotonitása miatt Lebesgue tétele szerint N_{g_i} $(i = 1,2,3,4)$ nullamértékű halmaz, azaz

$$N := \bigcup_{i=1}^{4} N_{g_i} \subset J_{t_0}$$

nullamértékű. Mivel $t_0 \notin \sigma(\varphi^{-1}) = \sigma(h)$, ezért

$$h_{t_0}(s) := \frac{h(t_0+s)+h(t_0-s)}{2} \qquad (s \in J_{t_0})$$

nem-konstans függvény, ezért képe *valódi intervallum*

$$H_0 := h_{t_0}(J_{t_0}).$$

Legyen

$$C := \{u \in H_0 \mid \psi^{-1} \text{ nem differenciálható } u\text{-ban}\}.$$

Ekkor C Lebesgue tétele miatt nullamértékű, ezért $H_0 \backslash C$ pozitív mértékű halmaz.

Legyen

$$D := h_{t_0}^{-1}(H_0 \setminus C) \subseteq J_{t_0}.$$

Ekkor $h_{t_0}(D) = H_0 \setminus C$. Ha D nullamértékű halmaz lenne, akkor $h_{t_0}(D)$ is nullamértékű lenne, ugyanis h_{t_0} lokálisan Lipschitz-tulajdonságú függvény a 4.2.§. 4.2.3. tétele miatt. Ezért D pozitív mértékű halmaz I_{t_0}-ban, így $D \setminus N$ is pozitív mértékű, azaz $D \setminus N$ nemüres, vagyis létezik

$$s_0 \in D \setminus N.$$

Ekkor g_i differenciálható s_0-ban $(i = 1, 2, 3, 4)$ és ψ^{-1} differenciálható $h_{t_0}(s_0)$-ban. Mármost (75)-ből

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(t + s_0) + \varphi^{-1}(t - s_0) - \psi^{-1}\left(\frac{h(t + s_0) + h(t - s_0)}{2}\right) \tag{76}$$

minden $t \in J$-re és az előzőek szerint φ^{-1} differenciálható $(t_0 + s_0)$-ban, $(t_0 - s_0)$-ban; h differenciálható $(t_0 + s_0)$-ban és $(t_0 - s_0)$-ban és ψ^{-1} differenciálható $h_{t_0}(s_0)$-ban, ezért (75) jobboldala az összetett függvény differenciálási szabálya miatt differenciálható t_0-ban, ezért (75) miatt φ^{-1} differenciálható t_0-ban. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Ezek után be fogjuk bizonyítani az alábbi fontos tételt.

4.3.8. tétel. *Ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, akkor létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, amelyben φ és ψ differenciálható és $\varphi'(x) \neq 0$, $\psi'(x) \neq 0$ ha $x \in K$.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\varphi^{-1} : J \to I$ függvényt, ahol $J := \varphi(I)$. Ekkor két eset lehetséges:

(i) $\sigma(\varphi^{-1}) = J$, azaz φ^{-1}-nek minden $t \in J$ szimmetria pontja; vagy

(ii) $\sigma(\varphi^{-1}) \neq J$, azaz létezik φ^{-1}-nek nem-szimmetria pontja J-ben.

Az (i) esetben bármely $t \in J$ és $s \in J_t$ esetén

$$2\varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(t + s) + \varphi^{-1}(t - s),$$

amelyből φ^{-1} folytonossága miatt $\varphi^{-1}(u) = Au + B$ ($A \neq 0$, B konstansok) ha $u \in J$. Ebből $\varphi(x) \sim \chi_0(x)$ ha $x \in I$ és $\psi(x) \sim \chi_0(x)$ ha $x \in I$. Ezért bármely $K \subset I$ nemüres nyílt intervallumban φ és ψ differenciálható és $\varphi'(x) \neq 0$ és $\psi'(x) \neq 0$ konstans függvények.

A (ii) esetben létezik $t_0 \notin \sigma(\varphi^{-1})$ és $G := \{t \in J \mid t \notin \sigma(\varphi^{-1})\}$ jelöléssel a 4.3.6. lemma miatt G *nemüres nyílt* halmaz. Ezért létezik $\Delta \subset G \subset J$ *nemüres nyílt intervallum*, hogy a 4.3.7. tétel miatt φ^{-1} differenciálható Δ-ban. Ebből adódik, hogy φ differenciálható valamely $K_0 \subset I$ nemüres nyílt intervallumban és 4.2.§. 4.2.3. tételének következménye miatt $\varphi'(x) \neq 0$ ha $x \in K_0$. Tekintsük most a Matkowski–Sutô-problémát a K_0 nemüres nyílt intervallumban. Ekkor φ és ψ szerepe felcserélhető és ugyanezen meggondolással *létezik* $K \subset K_0 \subset I$ nemüres nyílt intervallum, amelyben ψ differenciálható és $\psi'(x) \neq 0$ ha $x \in K$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

4.4. A Matkowski–Sutô-párok folytonos differenciálhatósága. A 4.3.§. 4.3.8. tétele miatt elegendő azzal a problémával foglalkozni, hogy a $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár már rendelkezik a következő tulajdonsággal: φ és ψ differenciálható I-ben és $\varphi'(x) \neq 0$, $\psi'(x) \neq 0$ ha $x \in I$. Mivel φ' és ψ' Darboux tulajdonságú függvények, feltehetjük, hogy $\varphi'(x) > 0$, $\psi'(x) > 0$ ha $x \in I$. A 3.2.§. 3.2.7. Lemmája miatt ekkor a $J := \varphi(I)$, $f := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $g := \psi' \circ \varphi^{-1}$ jelölésekkel az $f, g : J \to \mathbb{R}_+$ függvényekre teljesül a

$$2f\left(\frac{u+v}{2}\right)[g(v) - g(u)] = f(u)g(v) - f(v)g(u) \tag{77}$$

függvényegyenlet minden $u, v \in J$-re.

4.4.9. definíció. Azt mondjuk, hogy a $h : J \to \mathbb{R}$ függvény eleme a $\mathcal{D}(J)$ halmaznak, ha

(i) $h = d \circ c$ alakú, ahol $c \in \mathcal{CM}(J)$ és az $I := c(J)$ jelöléssel $d : I \to \mathbb{R}$ *deriváltfüggvény*, azaz létezik $D : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $D'(x) = d(x)$ minden $x \in I$-re;

(ii) $h(t) > 0$, ha $t \in J$.

A fenti definíció értelmében a (77) egyenletben szereplő ismeretlen f és g függvények elemei $\mathcal{D}(J)$-nek.

Célunk a következő állítás bizonyítása.

4.4.10. tétel. *Ha $f, g \in \mathcal{D}(J)$ eleget tesz a (77) függvényegyenletnek minden $u, v \in J$-re, akkor létezik olyan $J_0 \subset J$ nemüres nyílt intervallum, amelyben f folytonos.*

Bizonyítás. (i) Ha létezik $J_0 \subset J$ nemüres nyílt intervallum, hogy f konstans J_0-ban, akkor az állítás igaz, mert ekkor f folytonos J_0-ban. Ha létezik olyan $J_0 \subset J$ nemüres nyílt intervallum, hogy g konstans J_0-ban, akkor legyen $g(t) =: k$ ha $t \in J_0$, ahol $k > 0$ konstans érték. Helyettesítsünk (77)-be tetszőleges $u, v \in J_0$ $(\subset J)$ értékeket. Ekkor $f(u)k - f(v)k = 0$ minden $u, v \in J_0$-ra, ahonnan $f(u) = f(v)$, azaz f konstans J_0-ban, amiből adódik, hogy f folytonos J_0-ban.

Ezért a jövőben feltehetjük, hogy f és g olyan függvények, amelyek bármely $J_0 \subset J$ nemüres nyílt intervallumban *nem konstans* függvények. Jelölje ezért $\mathcal{D}_0(J)$ azon $\mathcal{D}(J)$-beli függvényeket, amelyekre teljesül, hogy bármely $J_0 \subset J$ nemüres nyílt intervallumon nem-konstans függvények. Ezek szerint a (77) egyenlet további vizsgálatát olyan f, g függvényekre végezzük, amelyek $\mathcal{D}_0(J)$-ben vannak.

(ii) Legyen tehát $f, g \in \mathcal{D}_0(J)$, amelyekre teljesül (77) minden $u, v \in J$-re. Legyen

$$C(g) := \{t \mid t \in J,\ g \text{ folytonos } t\text{-ben}\}.$$

Ekkor $g = d \circ c$ (d derivált, c folytonos és szigorúan monoton) miatt g folytonos minden olyan $t \in J$ pontban, amelyre igaz, hogy d folytonos a $c(t)$ pontban. Mivel a d derivált függvény nulladik vagy első Baire-osztályba tartozó függvény, ezért Baire-tétele ([44], [46], [36]) miatt d folytonossági pontjainak halmaza *sűrű* a $c(J)$ intervallumban, ezért c tulajdonsága miatt $C(g)$ *sűrű* és G_δ*-típusú halmaz* J-ben ([44], [46], [36]).

Most megmutatjuk, hogy léteznek olyan $u_0, v_0 \in C(g)$ pontok, hogy

$$g(u_0) \neq g(v_0). \tag{78}$$

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy $g(t) = k$ minden $t \in C(g)$-re, ahol $k > 0$ konstans érték. Ekkor (77)-ből $u, v \in C(g)$ helyettesítéssel

$$f(u)k - f(v)k = 0$$

adódik, ahonnan $f(t) = l$ következik minden $t \in C(g)$-re, ahol $l > 0$ konstans érték.

A $C(g)$ halmaz tulajdonsága miatt bármely $u \in J$-hez létezik $v \in C(g)$, hogy $\frac{u+v}{2} \in C(g)$. Ezért (77)-ből

$$2l\left[k - g(u)\right] = f(u)k - lg(u)$$

minden $u \in J$-re. Ebből

$$f(u) = \frac{2lk - lg(u)}{k} \qquad \text{ha } u \in J. \tag{79}$$

Visszahelyettesítve (77)-be a (79) alakú f függvényt, kapjuk, hogy

$$2\,\frac{2lk - lg\left(\frac{u+v}{2}\right)}{k}\left[g(v) - g(u)\right] = \frac{2lk - lg(u)}{k}\,g(v) - \frac{2lk - lg(v)}{k}\,g(u)$$

minden $u, v \in J$-re, ahonnan némi számolással

$$\left[k - g\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]\left[g(v) - g(u)\right] = 0 \tag{80}$$

adódik minden $u, v \in J$-re.

Legyen most $v_0 \in J$ rögzített úgy, hogy $m := g(v_0) \neq k$ teljesüljön. Ilyen v_0 létezik, mert g nem-konstans.

Másrészt bármely $t \in J$-hez és bármely $\varepsilon > 0$-hoz, amelyre $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\, \subset J$ teljesül, létezik olyan $u \in\,]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\, \subset J$, hogy

$$g\left(\frac{u+v_0}{2}\right) \neq k.$$

Ez utóbbi állítás abból adódik, hogy g bármely valódi részintervallumon nem-konstans. Ebből (80) miatt $g(u) = g(v_0) = m$ teljesül. Így *bármely* $t \in J$ pontnak bármely környezetében van olyan u, amelyre $g(u) = m$ és van olyan s, amelyre $g(s) = k \neq m$ teljesül, amelyből adódik, hogy g seholsem folytonos, ami ellentmondás.

(iii) Az előző (ii) részben bebizonyítottuk, hogy ha $f, g \in \mathcal{D}_0(J)$ megoldásai (77)-nek, akkor léteznek olyan $u_0, v_0 \in C(g)$ pontok, hogy

$$g(u_0) \neq g(v_0).$$

Ekkor létezik u_0-nak olyan $U \subset J$ és v_0-nak olyan $V \subset J$ környezete, hogy bármely $u \in U$ és $v \in V$ esetén $g(u) \neq g(v)$, mivel g folytonos $u_0 \neq v_0$-ban. Ezért (77)-ből tetszőleges $u \in U$ és $v \in V$ esetén

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{f(u)g(v) - f(v)g(u)}{g(v) - g(u)} \tag{81}$$

következik. A (81) egyenletből az adott feltételek miatt következik, hogy f folytonos valamely nemüres, nyílt intervallumban. Ez következik Járai [31], [32] vizsgálataiból. Mivel Járai eredményei olyan általánosak, hogy a konkrét esetre vonatkozó specializáció ellenőrzése fáradságos, ezért Járai eszméit felhasználva a közvetlen bizonyítás mellett döntöttünk. A

$$C(f) := \{u \mid u \in J,\ f \text{ folytonos } u\text{-ban}\}$$

jelöléssel legyen

$$U_1 := C(f) \cap C(g) \cap U \qquad \text{és} \qquad V_1 := C(f) \cap C(g) \cap V.$$

Ekkor U_1 és V_1 diszjunkt *második kategóriájú* és *Baire-tulajdonságú* halmazok ([46]). Ezért Piccard tétele ([51], [35], [57], [58], [59], [28], [22]) miatt létezik olyan J_0 nemüres, korlátos nyílt intervallum, amelyre $J_0 \subset \frac{U_1+V_1}{2} \subset J$. Mármost ebből (81) miatt adódik, hogy f *folytonos* J_0-ban. Ugyanis legyen $t \in J_0$ tetszőleges és $t_n \to t$ $(t_n \in J)$. Ekkor feltehetjük, hogy $t_n \in J_0$. Ezért $t_n = \frac{u_n+v_n}{2}$, ahol $u_n \in U_1$ és $v_n \in V_1$ és $t = \frac{u+v}{2}$, ahol $u \in U_1$ és $v \in V_1$. Az $\{u_n\}$ és $\{v_n\}$ *korlátos* sorozatnak van olyan $\{u_{n_k}\}$ és $\{v_{n_k}\}$ részsorozata, amely konvergens és $u_{n_k} \in U_1$ és $v_{n_k} \in V_1$ miatt $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = u^* \in U$ és $\lim\limits_{k\to\infty} v_{n_k} = v^* \in V$. Mivel $t_{n_k} = \frac{u_{n_k}+v_{n_k}}{2} \to \frac{u^*+v^*}{2}$ $(k \to \infty)$ és $\frac{u^*+v^*}{2} = \frac{u+v}{2}$, ezért

$$\begin{aligned}
f(t) &= f\left(\frac{u+v}{2}\right) = f\left(\frac{u^*+v^*}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{f(u^*)g(v^*) - f(v^*)g(u^*)}{g(v^*) - g(u^*)} = \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{f(u_{n_k})g(v_{n_k}) - f(v_{n_k})g(u_{n_k})}{g(v_{n_k}) - g(u_{n_k})}\right] = \\
&= \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{u_{n_k}+v_{n_k}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(t_n),
\end{aligned}$$

azaz f folytonos t-ben. ■

Ezzel elérkeztünk a következő regularitási tétel kimondásához.

4.4.11. tétel. *Ha $(\varphi,\psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, akkor létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, hogy φ és ψ folytonosan differenciálhatók K-ban és $\varphi'(x) \neq 0$, $\psi'(x) \neq 0$ ha $x \in K$.*

Bizonyítás. Legyen $(\varphi,\psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár. Ekkor a 4.3.§. 4.3.8. tétele miatt létezik olyan $K_1 \subset I$ nemüres nyílt intervallum, amelyben φ és ψ differenciálható, továbbá $\varphi'(x) \neq 0$, $\psi'(x) \neq 0$, ha $x \in K_1$. Feltehetjük, hogy $\varphi'(x) > 0$, $\psi'(x) > 0$ ha $x \in K_1$. Ekkor a 3.2.§. 3.2.7. lemmája miatt a $J := \varphi(K_1)$, $f := \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $g := \psi' \circ \varphi^{-1}$ jelölésekkel fennáll a (32) (illetve a (77)) függvényegyenlet, ahol $f, g \in \mathcal{D}(K_1)$. Ezért a 4.4.§. 4.4.10. tétele miatt létezik olyan $J_0 \subset J$ nemüres nyílt intervallum, amelyben f folytonos. Ez azt jelenti, hogy az $f := \varphi' \circ \varphi^{-1} : J \to \mathbb{R}_+$ függvény *folytonos* $J_0 \subset J$-ben. Ebből $K_2 := \varphi^{-1}(J_0) \subset K_1 \subset I$ nemüres nyílt intervallum és bármely $x \in K_2$-re létezik $s \in J_0$, hogy $x = \varphi^{-1}(s)$, azaz

$$\varphi'(x) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(s) = f(s) = f \circ \varphi(x)$$

minden $x \in K_2$-re. Ebből az összetett függvény folytonossága miatt φ' *folytonos* a $K_2 \subset I$ nemüres nyílt intervallumban.

Most tekintsük a $(\varphi,\psi) \in \mathcal{CM}(K_2)^2$ párt, amely nyilván Matkowski–Sutô-pár. Ekkor φ folytonosan differenciálható K_2-ben és $\varphi'(x) > 0$ ha $x \in K_2$. Alkalmazzuk most eredményünket ψ-re, kapjuk, hogy van $K \subset K_2$ nemüres nyílt intervallum, hogy ψ folytonosan differenciálható K-ban és $\psi'(x) > 0$ ha $x \in K$. Ekkor K-ban igaz a tétel állítása és ezzel a bizonyítást befejeztük. ∎

4.5. A Matkowski–Sutô-probléma megoldása. Eddigi vizsgálataink fő eredménye az eredeti Matkowski–Sutô-probléma megoldása.

4.5.12. tétel. *Ha $(\varphi,\psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár, azaz a $\varphi,\psi \in \mathcal{CM}(I)$ függvények eleget tesznek a*

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right) = x + y \tag{82}$$

függvényegyenletnek minden $x, y \in I$-re, akkor létezik olyan $p \in \mathbb{R}$, hogy

$$\varphi(x) \sim \chi_p(x), \qquad \psi(x) \sim \chi_{-p}(x), \qquad \text{ha } x \in I. \tag{83}$$

Ez azt jelenti, hogy (82) akkor és csak akkor teljesül, ha létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy

$$A_\varphi(x,y) = S_p(x,y), \qquad A_\psi(x,y) = S_{-p}(x,y) \tag{84}$$

minden $x, y \in I$-re, ahol

$$S_p(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{ha } p = 0 \\ \dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{px}+e^{py}}{2}\right), & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \qquad (x, y \in I). \tag{85}$$

Bizonyítás. A 4.4.§. 4.4.11. tétele miatt létezik olyan $K \subset I$ nemüres nyílt intervallum, amelyben φ és ψ *folytonosan differenciálhatók és* $\varphi'(x) \neq 0$, $\psi'(x) \neq 0$ *ha* $x \in K$. Ezért a 3.2.§. 3.2.6. tétele miatt létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy $\varphi \sim \chi_p$, $\psi \sim \chi_{-p}$ K-ban teljesül, ahol χ_p a (31)-ben definiált függvény. A 3.3.§. 3.3.14. tétele (kiterjesztési tétel) miatt ekkor

$$\varphi(x) \sim \chi_p(x), \qquad \psi(x) \sim \chi_{-p}(x), \qquad \text{ha } x \in I,$$

azaz fennáll (83). (84) ennek a ténynek más megfogalmazása. ■

Most térjünk rá a 2.3.§-ban (lásd még 4.1.§) megfogalmazott általános Matkowski–Sutô típusú probléma megoldására a kváziaritmetikai közepek osztályában.

4.5.13. tétel. *Ha* $M_i : I^2 \to I$ $(i = 1, 2, 3)$ *kváziaritmetikai közepek* I*-ben, akkor az*

$$M_1 = M_2 \otimes M_3 \tag{86}$$

azonosság akkor és csak akkor teljesül I^2*-en, ha létezik* $f \in \mathcal{CM}(I)$ *és* $p \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$\begin{aligned} M_1(x,y) &= A_f(x,y), \\ M_2(x,y) &= A_{\chi_p \circ f}(x,y), \\ M_3(x,y) &= A_{\chi_{-p} \circ f}(x,y) \end{aligned} \tag{87}$$

minden $x, y \in I$*-re.*

Bizonyítás. Ekkor léteznek az $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{CM}(I)$ generáló függvények, hogy fennáll az

$$A_{f_1}(x,y) = A_{f_1}\left[A_{f_2}(x,y), A_{f_3}(x,y)\right] \tag{88}$$

invariancia-egyenlet minden $x, y \in I$-re. Ekkor $u := f_1(x)$, $v := f_1(y)$, $u, v \in$ $\in f_1(I) =: J$, $\varphi := f_2 \circ f_1^{-1}$, $\psi := f_3 \circ f_1^{-1}$ jelölésekkel (88) akkor és csak akkor teljesül, ha $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$ Matkowski–Sutô-pár. Ezért a 4.5.§. 4.5.12. tétele miatt létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy $\varphi \sim \chi_p$ és $\psi \sim \chi_{-p}$ J-ben. Ebből $f := f_1$ jelöléssel $f \in \mathcal{CM}(I)$ és

$$\varphi = f_2 \circ f_1^{-1} = f_2 \circ f^{-1}, \qquad \psi = f_3 \circ f_1^{-1} = f_2 \circ f^{-1}$$

miatt

$$f_2 = \varphi \circ f \sim \chi_p \circ f, \qquad f_3 = \psi \circ f \sim \chi_{-p} \circ f$$

I-ben valamely $p \in \mathbb{R}$-re. Ezért fennállnak a (87) egyenletek, ahol

$$\begin{aligned} A_{\chi_p \circ f}(x,y) &= f^{-1}\big[S_p\big(f(x), f(y)\big)\big] = \\ &= \begin{cases} f^{-1}\left(\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\right), & \text{ha } p = 0 \\[2ex] f^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{pf(x)}+e^{pf(y)}}{2}\right)\right), & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

minden $x, y \in I$-re. ■

Megjegyezzük, hogy ez a tétel messzemenő általánosítása a 3.1.§. 3.3.14. tételének.

5. Alkalmazások és további problémák

5.1. Néhány alkalmazás. Elsőként foglalkozzunk azzal a kérdéssel, amelyet Daróczy ([13]) és Daróczy–Páles ([17]) vizsgált. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és $M : I^2 \to I$ középérték. Azt kérdezzük, hogy mikor lesz ez az M középérték egyszerre *kváziaritmetikai* és *konjugált-aritmetikai* közép I-ben?

Ha M kváziaritmetikai közép I-ben, akkor létezik $\psi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right) \qquad (x,y \in I). \tag{89}$$

Ha M konjugált-aritmetikai közép I-ben, akkor létezik $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, hogy

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \qquad (x,y \in I). \tag{90}$$

Ezért a feltett kérdés (89) és (90) alapján az, hogy mikor teljesül a

$$\psi^{-1}\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \tag{91}$$

függvényegyenlet minden $x, y \in I$-re, ahol $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ ismeretlen függvények.

A következő eredmény teljesen megoldja a kérdést. A tétel kimondásához vezessük be a következő jelöléseket:

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, akkor legyen

$$P_+(I) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid I + \lambda \subset \mathbb{R}_+\}$$

és

$$P_-(I) := \{\mu \in \mathbb{R} \mid -I + \mu \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Megjegyezzük, hogy *korlátos* $I =]a,b[$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ esetén

$$P_+(I) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > -a\}$$

és

$$P_-(I) := \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu > b\}.$$

Ha I nemkorlátos, akkor $I = \mathbb{R}$ esetén $P_+(\mathbb{R}) = P_-(\mathbb{R}) = \emptyset$; ha $I =]-\infty, b[$ $(b \in \mathbb{R})$, akkor $P_+(I) = \emptyset$, $P_-(I) = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu > b\}$; és végül, ha $I =]a, \infty[$ $(a \in \mathbb{R})$, akkor $P_+(I) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > -a\}$ és $P_-(I) = \emptyset$. Jelölje továbbá

$$H(x,y) := \frac{2xy}{x+y}$$

a harmonikus közepet, ha $x, y \in \mathbb{R}_+$.

5.1.1. tétel. *Az $M : I^2 \to I$ középérték akkor és csak akkor kváziaritmetikai és konjugált-aritmetikai közép I-ben, ha a következő közepek egyike:*

$$M(x,y) = \frac{x+y}{2} \qquad (x,y \in I); \tag{92}$$

$$M(x,y) = H(x+\lambda, y+\lambda) - \lambda \qquad (x,y \in I) \tag{93}$$

valamely $\lambda \in P_+(I)$-re;

$$M(x,y) = -H(-x+\mu, -y+\mu) + \mu \qquad (x,y \in I) \tag{94}$$

valamely $\mu \in P_-(I)$-re, ahol $H : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ a harmonikus közepet jelöli.

Bizonyítás. Az előzőek miatt a (91) függvényegyenlet megoldásait kell megadnunk az ismeretlen $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ függvények ekvivalenciájának erejéig. Legyen (91)-ben $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$ $(u, v \in \varphi(I) =: J)$ tetszőleges és $f := \varphi^{-1}$, $g := \psi \circ \varphi^{-1}$ $(f, g \in \mathcal{CM}(J))$. Ekkor (91)-ből minden $u, v \in J$-re

$$A_f(u,v) + A_g(u,v) = u + v \tag{95}$$

következik az $f, g \in \mathcal{CM}(J)$ függvényekre, azaz fennáll a Matkowski–Sutô-egyenlet, tehát $(f,g) \in \mathcal{CM}(J)^2$ Matkowski–Sutô-pár. Ebből adódik a 4.5.§. 4.5.12. tétele miatt, hogy létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy $f(u) \sim \chi_p(u)$ ha $u \in J$, azaz

$$\varphi^{-1}(u) \sim \begin{cases} u, & \text{ha } p = 0 \\ e^{pu}, & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \qquad (u \in J). \tag{96}$$

Ebből $p = 0$ esetén $\varphi^{-1}(u) = au + b$ $(u \in J;\ a \neq 0,\ b$ konstansok). Ebből

$$\varphi(x) = \frac{x-b}{a} \sim x, \qquad \text{ha } x \in I. \tag{97}$$

Ha (96)-ban $p \neq 0$, akkor

$$\varphi^{-1}(u) = a\,e^{pu} + b,$$

ahol $a \neq 0$ és b konstans értékek. Ebből

$$x = \operatorname{sgn} a\, e^{\log|a| + p\varphi(x)} + b. \tag{98}$$

Mármost két eset lehetséges: (i) $\operatorname{sgn} a = +1$ vagy (ii) $\operatorname{sgn} a = -1$. Az (i) esetben (98)-ból $x - b > 0$, azaz $\lambda := -b \in P_+(I)$ és

$$p\varphi(x) + \log|a| = \log(x+\lambda) \qquad (x \in I),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \frac{1}{p}\log(x+\lambda) - \frac{\log|a|}{p} \sim \log(x+\lambda), \qquad \text{ha } x \in I. \tag{99}$$

Végül a (ii) esetben $-x + b > 0$, azaz $\mu := b \in P_-(I)$ és (98)-ból

$$p\varphi(x) + \log|a| = \log(-x + \mu) \qquad (x \in I),$$

ahonnan

$$\varphi(x) = \frac{1}{p}\log(-x+\mu) - \frac{\log|a|}{p} \sim \log(-x+\mu), \qquad \text{ha } x \in I. \tag{100}$$

Mármost a (97) alakú generátorfüggvény esetén kapjuk a (92) közepet. A (99) és (100) alakú generátorfüggvények esetén pedig kapjuk a (93) és (94) közepeket megoldásként. Ezek a közepek valóban egyszerre konjugáltaritmetikaiak és kváziaritmetikaiak az I intervallumban. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ∎

Egy másik alkalmazás közgazdasági jellegű. A kérdés a következő módon fogalmazható meg: valamely módon egy S mennyiséget elosztottak két csoport (célkitűzés) között, legyenek ezek x és y, azaz $x+y = S$. Mármost különböző erők hatására a döntéshozók arra kényszerülnek, hogy álláspontjaikat felülbírálják. A döntéshozók megegyeznek abban, hogy a módosított felosztások függjenek az eredeti felosztástól, azaz az új X és Y valamilyen *függvénye* legyen az x és y mennyiségeknek és az S felosztandó mennyiség ne változzon, azaz $X + Y = S = x + y$ teljesüljön. A második megegyezés az legyen, hogy az új X és Y mennyiségek az x és y mennyiségek kváziaritmetikai közepei legyenek (vagy ezzel egyenértékűen a $\mathcal{QA}(\mathbb{R}_+)$ osztályból származzanak). Ezért $X, Y \in \mathcal{QA}(\mathbb{R}_+)$ és

$$X + Y = x + y.$$

A harmadik megegyezés az legyen, hogy S értéke időről időre változhat, vele együtt x és y tetszőleges pozitív mennyiség lehet az $x + y = S$ megszorítással, ezért az első két elv az összes lehetséges esetre érvényesüljön. Ebből kapjuk, hogy az X és Y kváziaritmetikai közepek eleget tesznek a Matkowski–Sutô-egyenletnek. Ezért létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy az

$$S_p(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}, & \text{ha } p = 0 \\ \dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{px}+e^{py}}{2}\right), & \text{ha } p \neq 0 \end{cases}$$

jelöléssel

$$X(x,y) = S_p(x,y) \qquad \text{és} \qquad Y(x,y) = S_{-p}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

Az eredmény azt mutatja, hogy a döntéshozóknak végül is egy $p \in \mathbb{R}$ paraméterről kell dönteniük, ami alapján kijelölhetik az új X és Y felosztási értékeket.

A $p = 0$ *választás* azt az új felosztást eredményezné, amely azt mondja, hogy $X = Y$, azaz egyenlően kell az összeget a két csoport között elosztani. Minden más esetben ($p \neq 0$) ez nem így van. Így például

$$\lim_{p\to-\infty} S_p(x,y) = \min\{x,y\}, \qquad \lim_{p\to\infty} S_p(x,y) = \max\{x,y\}$$

miatt az első csoport x és y minimumát kapja, ha a döntéshozók a $p = -\infty$ értéket választják és a második az x és y maximumát. A $p = +\infty$ választással fordított eredményt kapunk, azaz az első csoport kapja a maximumot és a második a minimumot. Ez azt jelenti, hogy a döntéshozók megváltoztathatják az eredeti felosztást azáltal is, hogy a két csoportnak juttatott különböző nagyságú összegeket fordítva ítélik oda.

Végül $p < 0$ választással az első csoport mindig kisebb, míg a második csoport nagyobb értéket kap, és $p > 0$ esetén ez fordítva van.

A közgazdasági szemlélet fontosságára utal a következő megjegyzés. Elvileg azt sem kell tudni a bizottságnak, hogy az eredeti felosztás melyik csoportnak kedvezett. A következő ábra mutatja a lehetséges eseteket:

	1. csoport		2. csoport	összesen
1. döntés	x		y	$x+y$
2. döntés $p \in \mathbb{R}$ megadása				
$p=0$	$\dfrac{x+y}{2}$		$\dfrac{x+y}{2}$	$x+y$
$p=-\infty$	$\min\{x,y\}$		$\max\{x,y\}$	$x+y$
$p=+\infty$	$\max\{x,y\}$		$\min\{x,y\}$	$x+y$
$p<0$	$\dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{px}+e^{py}}{2}\right)$	$<$	$-\dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{-px}+e^{-py}}{2}\right)$	$x+y$
$p>0$	$\dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{px}+e^{py}}{2}\right)$	$>$	$-\dfrac{1}{p}\log\left(\dfrac{e^{-px}+e^{-py}}{2}\right)$	$x+y$

Végül a felsorolt esetekből $p \in \mathbb{R}$ megadással következik, hogy a két csoportnak juttatott erőforrások különbségének abszolútértéke a következő:

$$|X-Y| = \begin{cases} 0, & \text{ha } p=0 \\ |x-y|, & \text{ha } p=-\infty \quad \text{vagy} \quad p=+\infty \\ \left|\dfrac{1}{p}\log\left[\dfrac{1}{2}(1+\operatorname{ch} p(y-x))\right]\right|, & \text{ha } p\neq 0 \end{cases}$$

Bizonyára érdekes lenne valamilyen közgazdasági jellegű indoklást adni erre a tényre.

Harmadik és utolsó alkalmazásként a Daróczy–Maksa ([15]) dolgozatban felvetett probléma megoldását ismertetjük. Tegyük fel, hogy az M és N kváziaritmetikai közepekre teljesül az $M+N=2A$ (M-S) egyenlet az I^2 halmazon. Ekkor igaz a következő állítás: (D-M) *Ha létezik olyan* $a, b \in I$, $a \neq b$, *hogy* $M(a, b) = \frac{a+b}{2}$, *akkor* $M(x, y) = N(x, y) = \frac{x+y}{2}$ *minden* $x, y \in I$*-re.*

Ez az állítás a 4.5.§. 4.5.12. tétele alapján igaz, mivel ekkor létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy $M(x, y) = S_p(x, y)$ minden $x, y \in I$-re. Ebből, ha van olyan $a, b \in I$, $a \neq b$ és $M(a, b) = \frac{a+b}{2}$, akkor $p = 0$ szükségképpen és teljesül az állítás.

Másrészt a (D-M) állításból következik a 4.5.12. tétel. Tegyük fel, hogy a (D-M) állítás igaz. Ekkor

$$D(x, y) := M(x, y) - N(x, y) \qquad (x, y \in I)$$

folytonos és szimmetrikus függvény I^2-en, azaz a

$$\Delta := \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$$

összefüggő halmazon is. A feltétel miatt $D(a, b) = D(b, a) = 0$ $(a, b \in I,\ a \neq b)$ esetén $D(x, y) = 0$ minden $x, y \in I$ és $x \neq y$ esetén. Ha most $D(x, y) \neq 0$ minden $x, y \in I$ és $x \neq y$ esetén, akkor $D(x, y) \neq 0$, ha $(x, y) \in \Delta$. Mivel $D : \Delta \to \mathbb{R}$ folytonos és Δ összefüggő, ezért $D(x, y)$ jeltartó Δ-ban, azaz pl. $D(x, y) > 0$ ha $(x, y) \in \Delta$. A szimmetria miatt ekkor $D(x, y) > 0$ minden $x, y \in I$, $x \neq y$ esetén, azaz M és N szigorúan összehasonlítható I-ben. Hasonló a másik eset is. Ezért a [15] dolgozat eredményéből következik, hogy létezik $p \neq 0$, hogy $M = S_p$ és $N = S_{-p}$. Természetesen ez nem ad új bizonyítást a Matkowski–Sutô-problémára, mivel a (D-M) állítást nem tudtuk bizonyítani a (M-S) probléma megoldásától függetlenül.

5.2. További problémák és eredmények. Ebben a paragrafusban olyan problémákat tárgyalunk, amelyeket a Matkowski–Sutô-probléma inspirált közvetve vagy közvetlenül.

(A) *Az* α*-rendű kváziaritmetikai közepek egyenlősége.*

Ha $\alpha \geq -1$ és $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, akkor az

$$A_\varphi^{(\alpha)}(x, y) := \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y) + \alpha\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2+\alpha}\right) \qquad (x, y \in I) \tag{101}$$

mennyiséget α-rendű kváziaritmetikai középnek neveztük I-ben (lásd [18]). Természetes kérdésként merül fel, hogy mikor lesz két ilyen közép egyenlő, azaz mikor teljesül az

$$A_\varphi^{(\alpha)}(x, y) = A_\psi^{(\beta)}(x, y) \qquad (x, y \in I) \tag{102}$$

azonosság, ahol $\alpha, \beta \geq -1$ és $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. Eddig két esetet tudtunk megoldani: (i) $\alpha = \beta$; (ii) $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Az (i) esetben megmutattuk, hogy (102) akkor és csak akkor teljesül, ha $\varphi(x) \sim \psi(x)$ ha $x \in I$ (ez még nem publikált). A (ii) esetet az 5.1.§-ban tárgyaltuk, amelyet a Matkowski–Sutô-problémára adott válaszunk segítségével oldottunk meg. A hátramaradó esetek az alábbi problémák felvetésére vezetnek.

Ha (102)-ben $\beta = 0$, akkor

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y) + \alpha\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2+\alpha}\right) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right),$$

ahonnan $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$ $(u, v \in \varphi(I) =: J)$ és $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, $g := \varphi^{-1}$ $(f, g \in \mathcal{CM}(J))$ jelölésekkel

$$(103) \qquad (2+\alpha)A_f(u,v) - \alpha A_g(u,v) = u + v$$

következik. Az előzőek miatt az $\alpha = 0$ és $\alpha = -1$ esetet már ismerjük, ezért $\alpha > 0$ vagy $0 > \alpha > -1$ az érdekes. Mindkét esetre vonatkozik az alábbi probléma:

Legyen $0 < \lambda < 1$ rögzített. Melyek azok az M_1, M_2, M_3 kváziaritmetikai közepek I-ben, amelyekre

$$(104) \qquad M_1 = \lambda M_2 + (1-\lambda)M_3$$

teljesül. (103)-ból $\alpha > 0$ esetén $\lambda := \frac{1}{2+\alpha}$, $M_1 := A_f$, $M_2 := A$, $M_3 := A_g$ választással kapjuk (104)-et; illetve (103)-ból $0 > \alpha > -1$ esetén $\lambda := \frac{2+\alpha}{2}$ $(\lambda \neq \frac{1}{2})$, $M_1 := A$, $M_2 := A_f$, $M_3 := A_g$ választással kapjuk (104)-et.

Az $\alpha\beta \neq 0$ és $\alpha \neq \beta$ $(\alpha \geq -1, \beta \geq -1)$ eset vizsgálata is nyílt probléma.

(B) Legyen $\alpha, \beta, \gamma \geq -1$ és $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{CM}(I)$ és kérdezzük, hogy mikor teljesül az

$$(105) \qquad A_\chi^{(\gamma)} = A_\varphi^{(\alpha)} \otimes A_\psi^{(\beta)}$$

összefüggés, amely az általánosított Matkowski–Sutô-problémát jelenti. Ez a kérdés $\alpha = \beta = \gamma = 0$ és $\chi(x) \sim x$ ha $x \in I$ esetben az eredeti Matkowski–Sutô-problémát jelenti. Az $\alpha = \beta = \gamma$ $(\alpha \geq -1)$ és $\chi(x) \sim x$ ha $x \in I$ esetben Daróczy és Páles ([18]) foglalkozott a problémával és valamelyik (φ vagy ψ) generátorfüggvény egyszeri folytonos differenciálhatósága mellett a problémát megoldottuk. Általános esetben nyílt a probléma és azt várjuk, hogy a Matkowski–Sutô-probléma megoldásához alkalmazott módszerek finomításával eredményt lehet elérni.

(C) Matkowski ([42]) foglalkozott a Beckenbach–Gini-közepekre vonatkozó

$$(106) \qquad M_1 = M_2 \otimes M_3$$

egyenlet megoldásával, ahol

$$M_i(x,y) := \frac{f_i(x)x + f_i(y)y}{f_i(x) + f_i(y)} \qquad (x, y \in I)$$

($i = 1, 2, 3$) és $f_i : I \to \mathbb{R}_+$ ($i = 1, 2, 3$) folytonos függvények. A probléma teljes megoldása ismeretlen. Hasonlóan nehéznek tűnik az ennél általánosabb súlyfüggvénnyel súlyozott kváziaritmetikai közepek esetére vonatkozó (106) egyenlet teljes megoldásrendszerének megadása.

(D) Korábban láttuk, hogy az egyparaméteres Hölder-közepek osztályára a (106) egyenlet megoldásait le tudjuk írni. Ezért érdekes lenne, hogy mit tudunk mondani a hasonló kérdésfeltevésre a Gini-közepek, illetve a Stolarsky-közepek két paraméteres osztályáról. Ezen kérdések megválaszolása reményteljesnek tűnik, mivel az analízis erős eszközei (differenciálhatóság, analitikusság) alkalmazhatók.

Irodalom

[1] J. Aczél, Un problème de M. L. Fejér sur la construction de Leibniz, *Bull. Sci. Math. (2)*, **72** (1948), 39–45.

[2] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press (New York–London, 1966).

[3] J. Aczél, The state of the second part of Hilbert's fifth problem, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **20** (1989), no. 2, 153–163.

[4] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press (Cambridge, 1989), With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.

[5] J. Aczél, I. Fenyő and J. Horváth, Sur certaines classes de fonctionnelles, *Portugaliae Math.*, **8** (1949), 1–11.

[6] J. Aczél, Gy. Maksa, C. T. Ng and Zs. Páles, A functional equation arising from ranked additive and separable utility, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2001), no. 4, 989–998.

[7] J. Aczél, Gy. Maksa and Zs. Páles, Solution of a functional equation arising in an axiomatization of the utility of binary gambles, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2001), no. 2, 483–493.

[8] G. Almkvist and B. Berndt, Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π, and the Ladies diary, *Amer. Math. Monthly*, **95** (1988), no. 7, 585–608.

[9] E. F. Beckenbach, A class of mean value functions, *Amer. Math. Monthly*, **57** (1950), 1–6.

[10] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer (Berlin, 1961).

[11] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM, (A study in analytic number theory and computational complexity)*, John Wiley & Sons Inc. (New York, 1987).

[12] B. C. Carlson, Algorithms involving arithmetic and geometric means, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 496–505.

[13] Z. Daróczy, On a class of means of two variables, *Publ. Math. Debrecen*, **55** (1999), no. 1-2, 177–197.

[14] Z. Daróczy, 10. Problem (in Report of Meeting: The 37th International Symposium on Functional Equations, 1991, Huntington, West Virginia, USA), *Aequationes Math.*, **60** (2000), no. 1–2, 190.

[15] Z. Daróczy and Gy. Maksa, On a problem of Matkowski, *Colloq. Math.*, **82** (1999), no. 1, 117–123.

[16] Z. Daróczy, Gy. Maksa and Zs. Páles, Extension theorems for the Matkowski–Sutô-problem, *Demonstratio Math.*, **33** (2000), no. 3, 547–556.

[17] Z. Daróczy and Zs. Páles, On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic, *Acta Math. Hungar.*, **90** (2001), no. 4, 271–282.

[18] Z. Daróczy, A Matkowski–Sutô-type problem for quasi-arithmetic means of order α, in: *Functional Equations — Results and Advances* (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Adv. Math. (Dordr.), vol. 3, Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht, 2002), pp. 189–200.

[19] B. De Finetti, Sul concetto di media, *Giornale dell' Instituto, Italiano degli Attuarii,* **2** (1931), 369–396.

[20] C. F. Gauss, *Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringen,* Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H. (Leipzig, 1927), Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion.

[21] C. Gini, Di una formula compressiva delle medie, *Metron,* **13** (1938), 3–22.

[22] K-G. Grosse-Erdmann, Regularity properties of functional equations and inequalities, *Aequationes Math.*, **37** (1989), no. 2-3, 233–251.

[23] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities,* Cambridge University Press, Cambridge, 1934 (first edition), 1952 (second edition).

[24] D. Hilbert, Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris, 1900, *Gött. Nachr.* (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen) (1900), 253–297, Translated for the *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.),* **37** (1902), no. 4, 407–436.

[25] J. Horváth, Note sur un problème de L. Fejér, *Bull. École Polytech. Jassy [Bul. Politehn. Gh. Asachi. Iaşi],* **3** (1948), 164–168.

[26] A. Járai, On measurable solutions of functional equations, *Publ. Math. Debrecen,* **26** (1979), no. 1-2, 17–35.

[27] A. Járai, Regularity properties of functional equations, *Aequationes Math.,* **25** (1982), no. 1, 52–66.

[28] A. Járai, On regular solutions of functional equations, *Aequationes Math.,* **30** (1986), no. 1, 21–54.

[29] A. Járai, On Hölder continuous solutions of functional equations, *Publ. Math. Debrecen,* **43** (1993), no. 3–4, 359–365.

[30] A. Járai, *Regularity properties of functional equations*, Leaflets in Mathematics, vol. 4, Janus Pannonius University (Pécs, 1996).

[31] A. Járai, *Többváltozós függvényegyenletek regularitási tulajdonságai,* Akadémiai doktori értekezés, Informatikai Intézet, Eötvös Loránd Tudományegyetem (Budapest, 1999).

[32] A. Járai, Baire-property implies continuity for solutions of functional equations — even with few variables, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **66** (2000), no. 3-4, 579–601.

[33] B. Knaster, Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Math.*, **2** (1949), 1–4.

[34] A. Kolmogorov, Sur la notion de la moyenne, *Rend. Accad. dei Lincei (6),* **12** (1930), 388–391.

[35] Z. Kominek, Some generalization of the theorem of S. Piccard, *Uniw. Śląski w Katowicach—Prace Mat.*, **4** (1973), 31–33.

[36] M. Laczkovich, *Valós függvénytan*, Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar (Budapest, 1995).

[37] D. H. Lehmer, On the compounding of certain means, *J. Math. Anal. Appl.*, **36** (1971), 183–200.

[38] Gy. Maksa, A. A. J. Marley and Zs. Páles, A simple characterization of binary rank-dependent expected utility of gains (losses) with exponential-like utility, *J. Math. Psychol.*, közlésre benyújtva.

[39] Gy. Maksa, A. A. J. Marley and Zs. Páles, On a functional equation arising from joint-receipt utility models, *Aequationes Math.*, **59** (2000), no. 3, 273–286.

[40] J. Matkowski, Invariant and complementary quasi-arithmetic means, *Aequationes Math.*, **57** (1999), 87–107.

[41] J. Matkowski, Iterations of mean-type mappings and invariant means, *Ann. Math. Sil.*, **13** (1999), 211–226, European Conference on Iteration Theory (Muszyna-Złockie, 1998).

[42] J. Matkowski, On invariant generalized Beckenbach–Gini means, in: *Functional Equations — Results and Advances* (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Advances in Mathematics, vol. 3, Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht, 2002), pp. 219–230.

[43] M. Nagumo, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Jap. Jour. of Math.*, **7** (1930), 71–79.

[44] I. P. Natanson, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen,* fifth ed., Akademie-Verlag (Berlin, 1981), Edited by Karl Bögel.

[45] C. T. Ng, 20. Remark (Solution to Problem 10 by Daróczy) (in Report of Meeting: The 37th International Symposium on Functional Equations, 1991, Huntington, West Virginia, USA), *Aequationes Math.*, **60** (2000), no. 1–2, 193–194.

[46] J. C. Oxtoby, *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces,* Springer (New York, 1971), Graduate Texts in Mathematics, Vol. 2.

[47] Zs. Páles, *Újabb módszerek a függvényegyenletek és a függvényegyenlőtlenségek elméletében,* Akadémiai doktori értekezés, Matematikai és Informatikai Intézet, Kossuth L. Tudományegyetem (Debrecen, 1999).

[48] Zs. Páles, Nonconvex functions and separation by power means, *Math. Inequal. Appl.*, **3** (2000), no. 2, 169–176.

[49] Zs. Páles, Problems in the regularity theory of functional equations, *Aequationes Math.*, **63** (2002), no. 1-2, 1–17.

[50] Zs. Páles and P. Volkmann, Characterization of a class of means, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada,* **11** (1989), no. 6, 221–224.

[51] S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euklidien,* Mém. Univ. Neuchâtel, vol. 13, Secrétariat de l'Université Neuchâtel (1939).

[52] C. Ryll-Nardzewski, Sur les moyennes, *Studia Math.*, **11** (1949), 31–37.

[53] M. Sablik, The continuous solutions of a functional equation of Abel, *Aequationes Math.*, **39** (1990), 19–39.

[54] M. Sablik, A functional equation of Abel revisited, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg,* **64** (1994), 203–210.

[55] M. Sablik, 28. Remark (Concerning Problem 10 posed by Daróczy) (in Report of Meeting: The 37th International Symposium on Functional Equations, 1991, Huntington, West Virginia, USA), *Aequationes Math.,* **60** (2000), no. 1–2, 197.

[56] M. Sablik, Final part of the answer to a Hilbert's question, in: *Functional Equations — Results and Advances* (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Advances in Mathematics, vol. 3, Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht, 2002), pp. 231–242.

[57] W. Sander, Regularitätseigenschaften von Funktionalungleichungen, *Glas. Mat. Ser. III,* **13(33)** (1978), no. 2, 237–247.

[58] W. Sander, A generalization of a theorem of S. Piccard, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **73** (1979), no. 2, 281–282.

[59] W. Sander, Ein Beitrag zur Baire-Kategorie-Theorie, *Manuscripta Math.,* **34** (1981), no. 1, 71–83.

[60] I. J. Schoenberg, *Mathematical time exposures,* Mathematical Association of America (Washington, DC, 1982).

[61] K. B. Stolarsky, Generalizations of the logarithmic mean, *Math. Mag.,* **48** (1975), 87–92.

[62] K. B. Stolarsky, The power and generalized logarithmic means, *Amer. Math. Monthly,* **87** (1980), no. 7, 545–548.

[63] O. Sutô, Studies on some functional equations I, *Tôhoku Math. J.,* **6** (1914), 1–15.

[64] O. Sutô, Studies on some functional equations II, *Tôhoku Math. J.,* **6** (1914), 82–101.

[65] H. P. Thielman, On generalized means, *Proc. Iowa Acad. Sci.,* **56** (1949), 241–247.

[66] S. Toader, Th. Rassias and G. Toader, A Gauss-type functional equation, *Internat. J. Math. Math. Sci.,* **25** (2001), no. 9, 565–569.

[67] J. Todd, The lemniscate constants, *Comm. ACM,* **18** (1975), 14–19; corrigendum, ibid. **18** (1975), no. 8, 462, Collection of articles honoring Alston S. Householder.

[68] J. Todd, *Basic Numerical Mathematics. Vol. 1, Numerical analysis,* Birkhäuser Verlag (Basel, 1979).

Zoltán Daróczy and Zsolt Páles: Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem

In this paper the so-called Matkowski–Sutô-problem is completely solved, that is, continuous and strictly monotonic functions φ and ψ defined on an open real interval I are determined such that the functional equation

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)+\psi^{-1}\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right)=x+y$$

holds for all $x, y \in I$.

Based on Lebesgue's theorem on the almost everywhere differentiability of monotonic functions, first the local Lipschitz-property of φ and ψ and their inverses is shown. Then the differentiability of these functions is proved in a subinterval of I. Finally, using Baire's theorem on the continuity properties of derivative functions, the continuous differentiability of φ and ψ in a subinterval is deduced. After these regularity properties, the equation is solved with earlier methods of the authors.

The main result obtained is a generalization of that of Sutô (1914) and Matkowski (1999).

As application, the connection to Gauss composition of means, the equality problem of quasi-arithmetic means and conjugate arithmetic means is discussed and solved.

Daróczy Zoltán és Páles Zsolt

Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézete
4010 Debrecen
Pf. 12

`daroczy@math.klte.hu`
`pales@math.klte.hu`

A KONTINUUM-HIPOTÉZIS
1. RÉSZ

W. HUGH WOODIN*

1. Bevezetés

A matematika leghíresebb formálisan megoldhatatlan problémája vélhetően a

Cantor-féle kontinuum-hipotézis: *Ha $X \subseteq \mathbb{R}$ nem-megszámlálható halmaz, akkor létezik bijekció X és $\mathbb{R}$ között.*

A kontinuum-hipotézis volt az első Hilbert ama nevezetes listáján is, amely a matematika 20. században megoldandó problémáit foglalta össze.

Egyre több problémáról válik ismertté, hogy a halmazelmélet (szokásos) axiómáira támaszkodva nem lehet őket megoldani; a kontinuum-probléma is ilyen.

Ugyanakkor néhány „megoldhatatlan" problémát mára mégis megoldottak. Mit is jelent ez pontosabban? Meg lehet-e oldani hasonló értelemben a kontinuum-problémát is? A cikk ilyen kérdésekkel foglalkozik, miközben érinti a halmazelméleti vizsgálatok sok aktuális területét. Nevezetesen, mind a *nagy-számosság axiómák*, mind a *projektív meghatározottsági axiómák* központi szerepet fognak játszani. Az utóbbi néhány évben kialakult egy sajátos megközelítési mód a kontinuum-probléma tanulmányozására; én is ezt fogom követni. Téves lenne ezt úgy érteni, hogy ez lenne az egyedüli, vagy akár a legjobb megközelítés. Ugyanakkor ez a választott megközelítés megmutatja, hogy a modern halmazelmélet különböző, igen eltérő kutatási irányai együtt hogyan helyezhetik új megvilágításba a kontinuum-problémához hasonló alapvető kérdéseket.

A halmazelmélet általánosan elfogadott (ZFC-vel jelölt) axiómarendszere a Zermelo–Fraenkel-axiómákból és a kiválasztási axiómából áll – ezt a halmazelmélet huszadik századi változatának is nevezhetném. A ZFC axiómákkal és a hozzájuk kapcsolódó kérdésekkel kapcsolatban [7]-re utalunk.

Egy Φ állítás a halmazelmélet axiómáitól *független,* ha igaz a következő aritmetikai állítás: ZFC-ből sem Φ sem $\neg\Phi$ nem vezethető le.

*Az eredeti cikk a Notices of the AMS 2001 június/júliusi számában jelent meg. Fordította Sági Gábor.

Természetesen, ha ZFC ellentmondásos, akkor minden állítás levezethető belőle, ezért egy Φ formula függetlensége csak akkor bizonyítható, ha feltesszük, hogy ZFC konzisztens (ellentmondástalan). Sokszor, mint látni fogjuk, ennél erősebb feltevésekre is szükségünk lesz.

A kontinuum-hipotézissel (röviden CH-val) kapcsolatos első eredményt Gödel érte el.

Tétel (Gödel). *Tegyük fel, hogy ZFC konzisztens. Ekkor $ZFC + CH$ is konzisztens.* ■

A halmazelmélet modern korszaka azzal kezdődött, hogy Cohen felfedezte a *forszolás* módszerét. Ezzel a technikával igazolható a következő tétel is.

Tétel (Cohen). *Tegyük fel, hogy ZFC konzisztens. Ekkor ZFC + „CH hamis" is konzisztens.* ■

A következőkben először áttekintem a matematikai logika néhány alapfogalmát és vázolom azokat a módszereket, melyekkel megmutatható, hogy egy állítás független ZFC-től. Bár a függetlenségi tételek végső soron aritmetikai állítások, melyek a számelméletben bizonyíthatók, mégis inkább a halmazelméletben szokás dolgozni.

$\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ jelöli a halmazelmélet formális nyelvét; ez formulák egy megszámlálható összessége. $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ szabad változót nem tartalmazó (zárt) formulái a mondatok. Az $\hat{=}$, és $\hat{\in}$ jelek csupán a formális nyelv *szimbólumai,* melyeknek nincs eleve adott jelentésük.

Az elemi logikából ismertnek tekintjük a fenti nyelvhez tartozó *struktúra* fogalmát. Ez egy olyan $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$ pár, ahol M egy nemüres halmaz és $E \subseteq M \times M$ egy kétváltozós reláció M-en. Ha Φ az $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ nyelv egy mondata, akkor az $\mathcal{M}$ struktúra a Φ egy *modellje* (jelölés: „$\mathcal{M} \models \Phi$"), ha igaz kijelentést kapunk az $\langle M, E\rangle$ struktúráról, amikor a Φ-beli $\hat{\in}$ jeleket E-vel és az $\hat{=}$ jeleket M egyenlőségrelációjával értelmezzük. Természetesen tekinthetnénk $\langle M, E, \sim\rangle$ alakú struktúrákat is, ahol $\sim$ egy – az $\hat{=}$ értelmezésére szolgáló – ekvivalenciareláció M-en, de ekkor át lehet térni az $\langle M/\sim, E/\sim\rangle$ faktorstruktúrára, tehát ezzel az általánosítási kisérlettel semmit nem nyerünk.

Mondatok egy tetszőleges halmazát *elméletnek* nevezzük, és ha T egy elmélet, „$\langle M, E\rangle \models T$"-vel jelöljük azt, hogy minden $\Phi \in T$ mondatra $\langle M, E\rangle \models \Phi$.

ZFC egy konkrét (végtelen) elmélet, ZFC modelljei azok az $\langle M, E\rangle$ struktúrák, melyekre

$$\langle M, E\rangle \models ZFC.$$

ZFC modelljei igen természetes módon definiálhatók a formális logika segítsége nélkül is, ha átgondoljuk, hogy az egyes ZFC-axiómák igazsága (illetve hamis volta) mit jelent egy-egy struktúrára nézve. Például, ZFC egyik axiómája a *meghatározottsági axióma,* ami így formalizálható:

$$\forall x_1 \forall x_2 \big(x_1 \hat{=} x_2 \leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \hat{\in} x_1 \leftrightarrow x_3 \hat{\in} x_2)\big).$$

Kevésbé formálisan ez azt jelenti, hogy két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.

$$\langle M, E\rangle \models \text{„meghatározottsági axióma''}$$

akkor és csak akkor, ha minden $a \in M$-re és minden $b \in M$-re teljesül, hogy

$$\{c \in M \mid \langle c, a\rangle \in E\} = \{c \in M \mid \langle c, b\rangle \in E\},$$

esetén $a = b$.

Ezért $\langle \mathbb{R}, <\rangle \models$ „meghatározottsági axióma", de ha az $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relációt így definiáljuk:

$$E = \{(n, m) \mid \text{ valamely } p \text{ prímre } p^{n+1} \mid m \text{ és } p^{n+2} \nmid m\},$$

akkor $\langle \mathbb{N}, E\rangle \not\models$ „meghatározottsági axióma".

A további axiómák vizsgálatával természetes módon eljuthatunk ZFC modelljeinek definíciójához.

Egyszerűen definiálható olyan modell, amely ZFC minden axiómáját kielégíti, kivéve a kritikus végtelenségi axiómát. Például legyen E_0 az előbb definiált kétváltozós reláció $\mathbb{N}$-en, majd definiáljuk a $\sim_0$ ekvivalenciarelációt az

$$i \sim_0 j \quad \leftrightarrow \quad \{k \mid (k, i) \in E_0\} = \{k \mid (k, j) \in E_0\}$$

utasítással. Definiáljuk az E_1 bináris relációt így: $(i, k) \in E_1$ pontosan akkor, ha van olyan j, melyre $(j, k) \in E_0$ és $j \sim_0 i$, majd definiáljuk $\sim_1$-et E_1-ből ugyanúgy, ahogy $\sim_0$-at definiáltuk E_0-ból. Indukcióval folytatva az előzőket, definiáljuk a $\langle \sim_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ és $\langle E_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ növő sorozatokat. Legyen

$$\sim_\infty = \cup\{\sim_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

és $E_\infty = \cup\{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor az $\langle \mathbb{N}/ \sim_\infty, E_\infty/ \sim_\infty\rangle$ faktorstruktúra a végtelenségi axiómát kivéve ZFC összes axiómáját kielégíti. A végtelenségi axióma nem teljesül, mert minden $i \in \mathbb{N}$-re az ekvivalenciaosztályok $\{[j]_{\sim_\infty} \mid (j, i) \in E_\infty\}$ halmaza véges, hiszen azonos a $\{[j]_{\sim_\infty} \mid (j, i) \in E_0\}$ halmazzal, melynek nyilvánvalóan legfeljebb i eleme van.

2. Új ZFC-modellek konstrukciója

Van-e ZFC-nek modellje? Gödel második nemteljességi tétele következtében reménytelen vállalkozás lenne megpróbálni azt *bizonyítani*, hogy ZFC-nek van modellje, ha csak a ZFC axiómákat használjuk. Tanulmányozhatjuk viszont azt a kérdést, hogy miként építhetünk új (remélhetőleg érdekes) ZFC modelleket már adott ZFC modellekből.

Gödel 1938-ban megoldotta a *részstruktúra* problémát, megmutatva, hogy ha $\langle M, E\rangle \models ZFC$, akkor van olyan $M^* \subseteq M$, melyre

$$\langle M^*, E \cap (M^* \times M^*)\rangle \models ZFC + CH.$$

25 évvel később Cohen, (mondhatjuk, a halmazelmélet Galois-ja), megoldotta a *bővítési* problémát. Cohen bővítési tételének leggyengébb formája lényegében ekvivalens a cikk elején kimondott Cohen-tétellel. Ez a gyenge változat azt állítja, hogy ha $\langle M, E\rangle \models ZFC$, akkor van olyan $\langle M^{**}, E^{**}\rangle$ struktúra, melyre

$$\langle M^{**}, E^{**}\rangle \models ZFC + \text{„}CH \text{ hamis"},$$

továbbá $M \subseteq M^{**}$ és $E = E^{**} \cap (M \times M)$.

Cohen módszere rendkívül hatékonynak bizonyult: a módszer és általánosításai alapvető eszközök a függetlenség kimutatásában. Ráadásul lényegében nem ismert más effektív módszer ZFC modelljeinek bővítésére.

Fontos tény, hogy sem Cohen bővítési módszere, sem Gödel részstruktúra módszere nem változtatja meg az aritmetikai állítások igaz vagy hamis voltát, így a számelmélet *igazi* modelljének intuitív fogalma érintetlen marad.

Úgy tűnik, a legtöbb matematikus hisz abban, hogy minden egyes aritmetikai állítás vagy igaz, vagy hamis. Cohen módszerének nem ismeretes olyan általánosítása, mely ezt a meggyőződést kétségbe vonná. Ez persze nem jelenti azt, hogy ilyen általánosítást soha nem is fognak találni.

Az aritmetika előbbi tapasztalati teljességét a halmazelmélet nyilvánvaló nemteljességével összevetve néhányan úgy gondolják, hogy a függetlenség alapvető és elkerülhetetlen jelenség a halmazelméletben, sepciálisan a kontinuum-problémában rejlő bizonytalanság *elvi okokból* tisztázhatatlan. Ebből a nézőpontból a kontinuumhipotézis igazságának felvetése teljességgel értelmetlen kérdés, hasonlóan ahhoz, hogy „Milyen színű a π szám?".

Helytálló-e ez az elképzelés? Hogy erre választ kapjunk, először a Másodrendű Számelmélet (vagyis az egész számoknak és az egész számok összes halmazának együttes elmélete) néhány olyan klasszikus kérdését ismertetem, amelyek szintén nem oldhatók meg ZFC-ben, s amelyekről mégis azt állítom, hogy van megoldásuk: a másodrendű számelméletnek *vannak* olyan axiómái, melyekre ugyanolyan kanonikus (ugyanannyira teljes) elmélet építhető, mint amilyen a(z elsőrendű) számelmélet. Ezek a viszonylag új axiómák mélyebb betekintést nyújtanak a Másodrendű Számelméletbe, mint amilyet ZFC önmagában lehetővé tesz.

Kiterjeszthetők-e ezek az axiómák még bonyolultabb halmazokra a kontinuumprobléma megoldása érdekében? Ez lesz a cikk második részének központi kérdése.

3. Néhány előzmény

A jelen cikk szempontjából kényelmes a halmazelméletben dolgozni. Ez kezdetben zavaró lehet, hiszen a halmazelméletben dolgozva teszünk kisérletet a halmazelmélet elemzésére.

Tegyük fel tehát, hogy a halmazok V univerzuma létezik, és az axiómák által kifejezett állítások igazak ebben az univerzumban. Kezdetben csak a ZFC axiómákat tételezzük fel, majd később az axiómák listáját kibővítjük néhány nagyszámosság axiómával. Vizsgálataink ennek az univerzumnak az objektumaira vonatkoznak.

Definíció. Az X halmaz *tranzitív,* ha X minden eleme egyben X részhalmaza is. Egy X halmaz *tranzitív lezártja* a $\cap\{Y \mid Y$ tranzitív és $X \subseteq Y\}$ halmaz (ez nyilván a X-et tartalmazó legkisebb tranzitív halmaz). ■

Tegyük fel, hogy $\langle M, E\rangle$ egy ZFC modell. Ez a modell *tranzitív,* ha M tranzitív halmaz és

$$E = \{(a, b) \mid a \in M,\ b \in M \text{ és } a \in b\},$$

tehát $\hat{\in}$ interpretációja az igazi „eleme" reláció. ZFC tranzitív modelljei különösen hasznosak, de tranzitív modelleket nehezebb találni, mint közönséges modelleket, ugyanis abból, hogy ZFC-nek van modellje, nem következik, hogy ZFC-nek van tranzitív modellje is.

Cohen és Gödel új ZFC modellek konstruálásáról szóló tételeit akkor értjük meg legjobban, ha az $\langle M, E\rangle$ kiindulási struktúra tranzitív és M megszámlálható. Abban az esetben, amikor $\langle M, E\rangle$ tranzitív, a Gödel konstrukciója szerint adódó $\langle M^*, E^*\rangle$ részstruktúra szintén tranzitív. Ha $\langle M, E\rangle$ tranzitív és M megszámlálható, akkor az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy a Cohen bővítési módszerével előálló $\langle M^{**}, E^{**}\rangle$ struktúrák szintén tranzitívak.

A rendszámok azok a tranzitív X halmazok, melyeken az eleme reláció egy lineáris rendezést ad meg. Tehát egy tranzitív X halmaz pontosan akkor rendszám, ha minden $a, b \in X$-re teljesül, hogy amennyiben $a \neq b$, akkor $a \in b$ vagy $b \in a$. Az $(L, <)$ rendezett halmaz jólrendezett, ha L minden (nemüres) részhalmazának van $<$ szerint legkisebb eleme. A ZFC axiómákból következik, hogy ha $(L, <)$ egy jólrendezett halmaz, akkor van (pontosan egy) olyan X rendszám, melyre $(L, <)$ és $(X, \in)$ izomorfak. Az „eleme" reláció a rendszámok összességét jólrendezi, s ez a rendezés pontosan megegyezik a jólrendezések rendtípusainak rendezésével.

Az első három rendszám $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ és $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. A véges rendszámok megegyeznek a nemnegatív egészekkel, ω jelöli a legkisebb végtelen rendszámot, továbbá ω_1 jelöli a legkisebb nem-megszámlálható rendszámot. Végül a κ rendszám *számosság,* ha egyetlen $\alpha < \kappa$ rendszámra sem létezik bijekció α és κ között. A véges rendszámok számosságok, csakúgy mint ω és ω_1. Az az állítás, hogy az X halmaz számossága $\aleph_1$, pontosan azt jelenti, hogy van egy bijekció X és ω_1 között. Hasonlóan, X számossága $2^{\aleph_0}$ (vagyis c), ha van egy bijekció X és $\mathbb{N}$ hatványhalmaza között ($\mathbb{N}$ hatványhalmazát $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-el jelöljük, ez $\mathbb{N}$ összes részhalmazának halmaza).

A halmazok univerzumában a rendszámok mérik a halmazok rangját. Tegyük fel, hogy M egy tranzitív halmaz, és hogy $\langle M, \in\rangle \models ZFC$. Ekkor

$$\{\alpha \in M \mid \langle M, \in\rangle \models \text{„}\alpha \text{ egy rendszám''}\}$$

pontosan az M-beli rendszámok halmaza, továbbá, ez a rendszámok osztályának egy kezdőszelete. Tehát M rangja pontosan az $M \cap Ord$ rendszám, ahol Ord jelöli a rendszámok osztályát.

Definíció. Tegyük fel, hogy κ egy végtelen számosság. Ekkor $H(\kappa)$ jelöli az öröklődően κ-nál kisebb számosságú halmazok halmazát, tehát $x \in H(\kappa)$ pontosan akkor, ha x tranzitív lezártjának számossága kisebb, mint κ. ∎

Tetszőleges halmaz eleme $H(\kappa)$-nak, ha κ elegendően nagy számosság, ez az állítás – a többi axióma feltételezése mellett – ekvivalens a kiválasztási axiómával.

A kontinuum-probléma megválaszolásához $H(\omega_2)$ szerkezetét kellene megérteni, ahol ω_2 a legkisebb ω_1-nél nagyobb számosság. Ez a következő „fokozatos" megközelítést sugallja: először próbáljuk megérteni a $H(\omega)$ és $H(\omega_1)$ struktúrákat, és ezután vizsgáljuk $H(\omega_2)$-t. Kicsit precízebben: a feladat az, hogy keressünk megfelelő axiómákat ezekhez a struktúrákhoz. Mivel a kontinuum-hipotézis a $H(\omega_2)$ struktúráról szóló kérdés, $H(\omega_2)$ axiómáinak egy megfelelően teljes összessége talán már eldönti a kontinuum-hipotézis igazságát.

$H(\omega)$, az első ilyen struktúra, lényegében nem más, mint a jól ismert $\langle \mathbb{N}, +, \cdot\rangle$ struktúra. Valóban, meg lehet mutatni, hogy $\langle H(\omega), \in\rangle$ és $\langle \mathbb{N}/\sim_\infty, E_\infty/\sim_\infty\rangle$ izomorfak, ahol az utóbbi struktúrát az 1. szakasz végén definiáltuk. A számelmélet tehát lényegében ugyanaz, mint a halmazelmélet a végtelenségi axióma tagadásával.

$H(\omega_1)$, a következő struktúra, szintén jól ismert. Ez lényegében egyenértékű a

$$\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$$

struktúrával, vagyis a Másodrendű Számelmélet szokásos modelljével.

Az $\langle \mathbb{N}, +, \cdot\rangle$ és $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$ struktúrák formális nyelvei egyszerűen definiálhatók, ezek természetesen nem azonosak az $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ nyelvvel.

Vannak $H(\omega_1)$-re vonatkozó természetes kérdések, melyek nem oldhatók meg ZFC-ben. Azonban vannak olyan $H(\omega_1)$-re vonatkozó axiómák, melyek alapján ezek a kérdések már megválaszolhatók, sőt amelyek révén kiépíthető egy elmélet, ami éppen olyan kanonikus, mint a számelmélet. Ezek az axiómák nyilván *igazak,* bár igaz voltuk csak komoly munka után válik nyilvánvalóvá. Számomra lényeges módon ez azt is megmutatja, hogy a matematikai igazság feltárása nem pusztán egy formális vállalkozás.

A cikk második részében megkíséreljük majd az előbb említett $H(\omega_1)$-ről szóló axiómák $H(\omega_2)$-re vonatkozó általánosításait megtalálni. A kontinuum-problémára adható válasz is itt rejlik, hiszen a kontinuum-hipotézis megfogalmazható $H(\omega_2)$-ről szóló kérdésként is. Látni fogjuk, hogy *vannak* az előbb említett axiómáknak megfelelő általánosításai, de minden olyan általánosításból, mely egy bizonyos értelemben *erősen* kanonikus elméletet ad, meglepő módon, a kontinuum-hipotézis tagadása következik.

Meg kell majd védenem azt az állításomat, hogy $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ helyes általánosítása a $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ struktúra, nem pedig $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$, bár hagyományosan ez utóbbi – az $\mathbb{R}$ hatványhalmazából természetes módon képezhető – struktúrát tekintették a végtelennel kapcsolatos vizsgálatok következő állomásának. A $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ struktúra lehetséges erősen kanonikus elméleteit elemezve megmutatható, hogy a

$$\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$$

struktúrának nincs erősen kanonikus elmélete. Ha a kontinuum-hipotézis igaz, akkor – a $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ és a $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$ struktúrákhoz hasonlóan –

$$\langle H(\omega_2), \in \rangle$$

és

$$\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$$

lényegében azonosak (mindegyik interpretálható a másikban). Viszont, ha a kontinuum-hipotézis nem igaz, akkor a $\langle H(\omega_2), \in \rangle$ struktúra lényegesen egyszerűbb lehet, mint $\langle \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot, \in \rangle$.

4. Első lépés: $H(\omega_1)$

Tekintsük a következő műveleteket $\mathbb{R}^n$ részhalmazain, melyek a zárt halmazokból kiindulva generálják a *projetktív* halmazokat.

(Vetítés) Legyen $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a vetítésfüggvény, tehát

$$\pi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = (a_1, \ldots, a_n).$$

Az $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ halmaz π szerinti képét X *vetületének* nevezzük.

(Komplementumképzés) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$. X *komplementuma* az

$$X^* = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (a_1, \ldots, a_n) \notin X\}$$

halmaz.

Definíció (Luzin). $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *projektív halmaz,* ha van olyan k természetes szám, melyre X előállítható $\mathbb{R}^{n+k}$ egy zárt részhalmazából kiindulva véges sok vetítés és komplementumképzés segítségével. ∎

Megjegyzem, hogy mivel Euklídeszi terekben minden nyílt halmaz σ-kompakt, általában legalább háromszor kell alkalmaznunk az előbbi műveleteket ahhoz, hogy érdekes (azaz nem-Borel-) halmazt kapjunk eredményül. Könnyen látható, hogy $\mathbb{R}^{n+2}$ egy zárt részhalmazának $\mathbb{R}^{n+1}$-beli vetülete előáll zárt halmazok megszámlálható uniójaként. Komplementálva, és ismét vetítve már túljutunk a Borel-halmazokon, és az *analitikus* halmazokat kapjuk. Formálisan szólva, az $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz akkor analitikus, ha van olyan $C \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ zárt halmaz, melyre X az $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Y$ halmaz vetülete, ahol Y a C vetülete.

Miért tanulmányozzuk a projektív halmazokat? Egyszerűen azért, mert a $H(\omega_1)$ struktúra úgy is interpretálható, mint a projektív halmazok struktúrája. Precízebben, a projektív halmazok megfeleltethetők azoknak az $A \subseteq H(\omega_1)$ halmazoknak, amelyek paraméter segítségével definiálhatók a $\langle H(\omega_1), \in \rangle$ struktúrában, azaz amelyek megadhatók

$$A = \left\{ b \in H(\omega_1) \mid \langle H(\omega_1), \in \rangle \models \Phi[a, b] \right\}$$

alakban, ahol $\Phi(x_1, x_2)$ az $\mathcal{L}(\hat{=}, \hat{\in})$ nyelv egy alkalmas formulája és $a \in H(\omega_1)$ egy megfelelő elem. A logikában elterjedt gyakorlat, hogy egy struktúra vizsgálata azonos a struktúrában definiálható halmazok és relációk vizsgálatával.

A kiválasztási axiómából sok furcsa halmaz létezése következik. Jól ismert példa erre a Banach–Tarski-paradoxon: $\mathbb{R}^3$ egységgömbje feldarabolható véges sok részre úgy, hogy ezekből a részekből egybevágósági transzformációkkal két egységgömb rakható össze. Az ilyen átdarabolásokat *paradox átdarabolásoknak* nevezzük.

Most tekintsük a következő kérdést.

Kérdés. *Van-e $\mathbb{R}^3$ egységgömbjének olyan paradox átdarabolása, amelyikben minden rész projektív halmaz?*

$\mathbb{R}^n$ minden analitikus részhalmaza Lebesgue-mérhető; ezt először Luzin bizonyította 1917-ben. Ennek következtében $\mathbb{R}^3$ egységgömbjének nincs olyan paradox átdarabolása, melyben minden rész eleme lenne az analitikus halmazok által generált σ-algebrának. Ez azért van így, mert minden paradox átdarabolásnak nyilván tartalmaznia *kell* nem Lebesgue-mérhető részeket.

Az előző (projektív paradox átdarabolásokra vonatkozó) kérdésünk igy a következő, még alapvetőbb kérdéshez vezet:

Kérdés. *Lebesgue-mérhető-e minden projektív halmaz?*

Az 1920-as évekre világossá vált, hogy ez igen nehéz kérdés, pl. [8]-ban ez olvasható:

Nem tudjuk, és soha nem is fogjuk megtudni [hogy a projektív halmazok Lebesgue-mérhetők-e].

Gödel módszere, amivel megmutatta, hogy a kontinuum-hipotézis konzisztens ZFC-vel, egy további meglepő eredményt is szolgáltatott. Ennek jelentőségét maga Gödel hasonlította a kontinuum-hipotézissel kapcsolatos eredményei jelentőségéhez.

Tétel (Gödel). *Tegyük fel, hogy ZFC konzisztens. Ekkor $ZFC+$ „Van nem-mérhető projektív halmaz” szintén konzisztens.* ■

A tétel bizonyításának azonnali következménye, hogy az alábbi állítás szintén (relatíve) konzisztens a halmazelmélet axiómáival:

$\mathbb{R}^3$ egységgömbjének van olyan paradox átdarabolása, melyben minden rész egy analitikus halmaz komplementumának vetülete.

Luzin tétele az analitikus halmazok Lebesgue-mérhetőségéről tehát a legerősebb tétel, melyről elképzelhető, hogy bizonyítható feltéve, hogy *csak* ZFC axiómáival dolgozunk.

Noha *igaz*, hogy az összes projektív halmaz Lebesgue-mérhetősége konzisztens ZFC-vel, ez nem bizonyítható, ha csupán ZFC ellentmondástalanságát tesszük fel. Ugyanakkor Solovaynak a projektív halmazok mérhetőségi problémájára vonatkozó eredményeiből azonnal következik, hogy ha ZFC konzisztens, akkor a következő állítással bővítve is konzisztens marad:

$\mathbb{R}^3$ egységgömbjének nincs olyan paradox átdarabolása, melyben minden rész projektív halmaz.

Látjuk tehát, hogy már $H(\omega_1)$ szerkezetével kapcsolatban is felmerülnek olyan természetes kérdések, melyek (ZFC-ben) formálisan nem oldhatók meg. E kérdések megoldásához (ha egyáltalán megoldhatók) új axiómák felfedezésére van szükség. Gödel részstruktúra módszere és Cohen bővítési módszere is megváltoztathatja $H(\omega_1)$-et (ha $H(\omega_1)$-et az új modellben tekintjük), még abban az esetben is, ha a kezdeti és a végeredményként kapott modellek is tranzitívak. Kevésbé formálisan fogalmazva, a részstruktúra-képzés általában kihagy bizonyos egész számokból álló halmazokat, míg a Cohen-bővítésekben új egész számokból álló halmazok jelenhetnek meg. Ezért egyáltalán nem világos, hogy a projektív halmazokra vonatkozó fenti kérdések könnyebben kezelhetők, mint a kontinuum-hipotézis.

Gödel írja a következőket [6]-ban: „Léteznek olyan axiómák, melyeknek olyannyira sok ellenőrizhető és egy egész diszciplínát annyira új megvilágításba helyező következményük van, továbbá annyira hatékony módszereket adnak bizonyos problémák megoldásához (és amennyire csak lehetséges, ezt konstruktív módon teszik), hogy – függetlenül ezen axiómák belülről fakadó szükségességétől – el kell fogadnunk igazságukat legalább ugyanabban az értelemben, ahogy elfogadjuk egy megalapozott fizikai elmélet igazságát."

Most vizsgálat tárgyává teszek egy ilyen axiómát.

5. Projektív meghatározottság

Rögzítsük az $A \subseteq [0,1]$ halmazt. Definiálni fogjuk a G_A végtelen játékot, melyet két játékos, I és II játszik.

I és II felváltva választ egy

$$\varepsilon_i \in \{0,1\}$$

elemet úgy, hogy páratlan i-re mindig I, páros i-re pedig II választ. A játékot I kezdi ε_1 kiválasztásával, majd II kiválasztja ε_2-t, és így tovább.

Az I játékos nyer, ha

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i 2^{-i} \in A;$$

ellenkező esetben II nyer.

Legyen S az összes véges bináris sorozat halmaza. *Stratégiának* nevezünk egy

$$\tau : S \to \{0,1\}$$

függvényt. A játék egy $\langle \varepsilon_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ lefutását az I játékos τ-val generálja, ha $\varepsilon_1 = \tau(\emptyset)$ és minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\varepsilon_{2k+1} = \tau(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2k}).$$

Hasonlóan, a lefutást II generálja τ-val, ha minden $k \in \mathbb{N}$-re $\varepsilon_{2k} = \tau(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2k-1})$.

Azt mondjuk, hogy τ *nyerő stratégia* I számára, ha I minden olyan játékot megnyer, melynek lefutását τ-val generálja. Hasonlóan, τ *nyerő stratégia* II számára, ha II mindig nyer, amennyiben a játék lefutását τ-val generálja.

Definíció. Legyen $A \subseteq [0,1]$. A G_A játék *meghatározott* (röviden A meghatározott), ha G_A-ban valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája. ■

A kiválasztási axiómából következik, hogy van *nem* meghatározott A halmaz, ez egy egyszerű átlós érveléssel így igazolható: összesen csak $2^{\aleph_0}$ lehetséges stratégia van, továbbá $2^{\aleph_0}$ előírást kapunk A elemeire vonatkozóan, ha feltesszük, hogy egy konkrét stratégia a G_A játékban valamelyik játékos számára nyerő. Ezért, transzfinit rekurzióval, $2^{\aleph_0}$ lépésben tudunk olyan halmazt konstruálni, hogy a hozzá tartozó játékban egyetlen stratégia se legyen nyerő.

Ugyanakkor a kiválasztási axiómából adódó nem meghatározott halmaz általában nem projektív. Ez a következő (lényegében [12]-ben megfogalmazott) axiómát sugallja:

Projektív meghatározottság axiómája. A $[0,1]$ intervallum minden projektív részhalmaza meghatározott.

Ezen a ponton el kell ismernünk: nem nyilvánvaló, hogy a projektív meghatározottság axiómája igaz, sőt még az sem nyilvánvaló, hogy nem vezet ellentmondásra. Ugyanakkor, a projektív meghatározottság axiómája hasznos – bár erre az érvre azzal a viccel vágnak vissza a logikusok, hogy a hamis „$0 = 1$" állítás szintén hasznos axióma.

Kétrészes cikksorozatunk első felében egyik fő célunk éppen az, hogy olyan meggyőző bizonyítékokat mutassunk be, melyek szerint a projektív meghatározottság pont a „megfelelő axióma" a projektív halmazok kezelésére. Az általunk bemutatott bizonyítékok csak egy kis részét ölelik fel a jelenleg ismert hasonló eredményeknek. A projektív halmazok témaköre mára olyan hatalmas területté fejlődött, amit a vizsgálatok kezdeményezői nem hogy előre látni, de elképzelni sem tudtak.

1964-ben Mycielski és Swierczkowski bebizonyította, hogy ha a projektív meghatározottság fennáll, akkor minden projektív halmaz Lebesgue-mérhető. Ebből az axiómából következik tehát, hogy $\mathbb{R}^3$ egységgömbjének nincs olyan paradox átdarabolása, melyben minden rész projektív halmaz.

A projektív meghatározottság axiómájából az is következik, hogy minden nem-megszámlálható projektív halmaz számossága $2^{\aleph_0}$. Sőt, sokkal több is igaz: nem sokkal az axióma bevezetése után Davis bebizonyította, hogy minden nem-megszámlálható projektív halmaz tartalmaz egy nem-megszámlálható zárt halmazt.

Ezek szerint (a projektív meghatározottság feltételezése mellett) a projektív halmazok körében nincs *formális* ellenpélda a kontinuum-hipotézisre.

Meglepő módon, a kontinuum-hipotézis és a projektív halmazok közti kapcsolat eléggé összetett, még a projektív meghatározottság feltételezése *mellett* is. A cikksorozat második részének ez lesz a kiindulópontja.

Természetes módon merül fel a kiválasztási axióma projektív halmazokra vonatkozó változatainak vizsgálata.

Tegyük fel, hogy $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Minden $x \in \mathbb{R}$-re legyen

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}.$$

Legyen B az A halmaz vetülete, azaz $B = \{x \mid A_x \neq \emptyset\}$. Azt mondjuk, hogy az $f : B \to \mathbb{R}$ függvény *uniformizálja* az A halmazt, ha minden $x \in B$-re $f(x) \in A_x$. Az f függvény projektív, ha gráfja $\mathbb{R}^2$-nek projektív részhalmaza.

1930-ban Luzin kérdezte, hogy a sík minden projektív részhalmaza uniformizálható-e egy projektív függvénnyel. Majdnem egy fél évszázaddal később Moschovakis bebizonyította, hogy a válasz erre a kérdésre igenlő, ha a projektív meghatározottság fennáll.

A projektív meghatározottság feltételezése mellett a projektív halmazok szintjén a kiválasztási axiómáról a következő összefoglalás adható. Az összefoglaláshoz célszerű lesz, ha $\mathbb{R}^n$ projektív részhalmazainak fogalmát általánosítjuk. Azt mondjuk, hogy A *általános projektív* halmaz, ha M-el jelölt tranzitív lezártjához van olyan $\pi : \mathbb{R} \to M$ szürjektív függvény, melyre az

$$\{(x, y) \mid \pi(x) \in \pi(y)\}$$

halmaz $\mathbb{R}^2$-nek projektív részhalmaza. $\mathbb{R}^n$ részhalmazaira a két fogalom egybeesik: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor általános projektív halmaz, ha projektív halmaz.

Definíció szerint a projektív halmazok $\mathbb{R}^n$ részhalmazai; az általános projektív halmazok viszont lehetnek rendszámok, függvények, stb. Most megadjuk a fentebb ígért összefoglalást.

1. A kiválasztási axióma nem igaz a projektív halmazokra abban az értelemben, hogy a valós számok halmazának nincs projektív jólrendezése.

2. Legyen $F : X \to Y$ egy függvény, azt mondjuk, hogy f egy F-hez tartozó kiválasztási függvény, ha minden $r \in X$-re $F(r) \neq \emptyset \Rightarrow f(r) \in F(r)$. A kiválasztási axióma igaz a projektív halmazokra abban az értelemben, hogy minden $F : \mathbb{R} \to V$ általános projektív halmazhoz van olyan f kiválasztási függvény, amely maga is egy általános projektív halmaz.

6. Projektív meghatározottság és nagy számosságok

Elemezzük a projektív meghatározottságot fokozatosan, a halmazok bonyolultsága szerint.

1953-ban Gale és Stewart bizonyították, hogy a $[0,1]$ intervallum minden nyílt részhalmaza meghatározott, és kérdezték, igaz-e, hogy minden Borel-halmaz is meghatározott. Két évtizeddel később Martin bravúros technikával igazolta, hogy a válasz e kérdésre igenlő. Martin bizonyításában külön figyelemreméltó, hogy előzőleg Friedman igazolta (ld. [3]), hogy az összes Borel-halmaz meghatározottságát *nem* lehet bizonyítani a kiválasztási axiómával kibővített Zermelo-féle halmazelméletben. Ez a (ZC-vel jelölt) axiómarendszer a ZFC axiómákból áll, kivéve a helyettesítési axiómasémát. A legtöbb matematikus – akár tudatában van ennek, akár nem – ebben a ZFC-nél kissé szűkebb axiómarendszerben dolgozik.

Durván szólva Martin módszere abban állt, hogy minden egyes A Borel-halmazhoz – A Borel-rangja szerinti indukcióval-hozzárendelt egy $A^* \subset Z^{\mathbb{N}}$ nyílt halmazt, ahol Z egy (A-tól függő) diszkrét tér. A^* konstrukciója olyan, hogy az A^*-hoz tartozó játék[1] meghatározottságából következik A meghatározottsága is. A Gale–Stewart-féle tétel megfelelő változatát alkalmazva adódik, hogy A^* meghatározott, amiből így A meghatározottsága is következik. Amikor A átfut az összes lehetséges Borel-halmazon, a megfelelő Z halmazok a

$$\{\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}) \mid \alpha < \omega_1\},$$

halmaz elemein futnak át úgy, hogy A Borel-rangjával együtt nő a számosságuk. $\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R})$ itt $\mathbb{R}$-nek az α-adik iterált hatványhalmazát jelöli, ami a következő transzfinit indukcióval definiálható: Tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$, vagyis $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmaza. $\mathcal{P}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\mathcal{P}^{\alpha+1}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}))$, és végül

$$\mathcal{P}^\alpha(\mathbb{R}) = \cup\{\mathcal{P}^\beta(\mathbb{R}) \mid \beta < \alpha\},$$

ha α limesz rendszám.

A Zermelo-halmazelméletben nem bizonyítható, hogy $\mathcal{P}^\omega(\mathbb{R})$ létezik, ezért – Friedman tételének megfelelően – Martin bizonyítása ZC-ben nem működik.

Az összes $A \subseteq [0,1]$ analitikus halmaz meghatározottsága már nem bizonyítható ZFC-ben, egyszerűen azért, mert ZFC ehhez nem elég erős. Tehát Martin

[1] Itt a játékosok Z elemei közül választanak felváltva

tétele, mely szerint az összes Borel-halmaz meghatározott, a legerősebb eredmény, amit új axiómák felhasználása nélkül remélhetünk. Itt jutnak szerephez a nagy-számosság axiómák, intuitive ezek az axiómák bizonyos „nagy" számosságok létezését posztulálják. Talán a legismertebb ilyen axióma az, ami mérhető számosság létezését állítja. Egy nem-megszámlálható κ számosság mérhető, ha létezik κ-n olyan κ-teljes U ultraszűrő, amely nem főszűrő. A κ-teljesség azt jelenti, hogy ha $X \subset U$ és X számossága kisebb, mint κ, akkor $\cap\{A \subseteq \kappa \mid A \in X\} \in U$, azaz U nemcsak véges, de tetszőleges κ-nál kisebb metszetre is zárt.

Martin 1970 körül igazolta, hogy ha van mérhető számosság, akkor minden analitikus halmaz meghatározott. Ez tehát majdnem öt évvel azelőtt történt, mielőtt bizonyította, hogy minden Borel-halmaz meghatározott. (Minden Borel-halmaz analitikus, ezért Martin korábbi tételéből is következik, hogy minden Borel-halmaz meghatározott, de persze az analitikus halmazokra vonatkozó eredményt *nem* ZFC-ben bizonyította).

Másrészről Solovay megmutatta, hogy a projektív meghatározottság bizonyítása reménytelen, ha ZFC-n kívül csupán a mérhető számosságok létezését tesszük fel. Ennek, az előzőekhez hasonlóan az az oka, hogy $ZFC+$ „van mérhető számosság" sem elég erős: ha ZFC-t kiegészítjük a projektív meghatározottság axiómájával, akkor ebből következik ugyanis, hogy $ZFC+$ „van mérhető számosság" ellentmondástalan. Ezért Gödel második nemteljességi tétele szerint mérhető számosság létezéséből nem következhet a projektív meghatározottság, ehhez mérhető számosság létezésénél erősebb axiómákra van tehát szükség. Központi fontosságúvá vált az a speciális eset, hogy bizonyítsuk: $[0,1]$ minden $\mathbf{\Sigma}^1_2$ részhalmaza meghatározott (a $\mathbf{\Sigma}^1_2$-halmazok azok a projektív halmazok, amelyek előállíthatók egy analitikus halmaz komplementumának vetületeként). Sokan úgy gondolták, hogy egyetlen ismert nagy-számosság axióma *sem* elég erős ahhoz, hogy következzék belőle a $\mathbf{\Sigma}^1_2$-halmazok meghatározottsága. 1978-ban, az akkoriban ismert legerősebb nagy-számosság hipotézist használva, Martinnak mégis sikerült bebizonyítania, hogy minden $\mathbf{\Sigma}^1_2$-halmaz meghatározott. Végül 1983-ban bizonyítottam az összes projektív halmaz meghatározottságát nagy-számosság axiómák egy olyan természetes hierarchiáját használva, amelyek közül az az axióma a leggyengébb, amit Martin használt a $\mathbf{\Sigma}^1_2$-halmazok meghatározottságának igazolásához.

A fenti meghatározottsági bizonyítások természetessége azt sugallta, hogy a felhasznált nagy-számosság posztulátumok lényegében optimálisak. Bár ez a kép igen rokonszenvesnek tűnt (legalábbis Martinnak és nekem) később kiderült: hibás volt azt gondolni, hogy megtaláltuk az optimális axiómákat. A projektív meghatározottság bizonyítására felhasznált ezen nagy-számosság axiómák ugyanis *sokkal erősebbek* a szükségesnél (ideértve azt az axiómát is, melyet Martin használt a $\mathbf{\Sigma}^1_2$-halmazok meghatározottságának bizonyításához). Az első jelzések arról, hogy a kép pontatlan egy igen meglepő irányból jöttek: a bizonyítékot Foreman, Magidor és Shelah fedezték fel a Martin-maximummal kapcsolatos korszakalkotó munkájukban. A Martin-maximum egy maximális forszolási axióma, amit alább részletesen tárgyalunk. Végül 1984-ben sikerült igazolni a következő tételt.

Tétel (Shelah–Woodin). *Tegyük fel, hogy végtelen sok Woodin-számosság létezik. Ekkor minden projektív halmaz Lebesgue-mérhető.* ∎

Most nem adom meg a Woodin-számosság definícióját, ehelyett csak annyit jegyzek meg, hogy az a nagy-számosság axióma, miszerint „végtelen sok Woodin-számosság van" sokkal gyengébb, mint azok, amiket a fent említett meghatározottsági bizonyításokban használtunk.

A *Belső Modell Program* Gödel részstruktúra konstrukcióját olyan modellekre általánosítja, melyek különböző nagy-számosság axiómákat elégítenek ki (minél erősebb az axióma, annál nehezebb ez a probléma). Precízebben szólva, ha adott egy Ψ nagy-számosság axióma, akkor az a feladat, hogy keressünk $ZFC + \Psi$ minden $\langle M, E\rangle$ modelljéhez egy olyan $\langle M^*, E \cap (M^* \times M^*)\rangle$ részstruktúrát, ami szintén modellje $ZFC + \Psi$-nek, és ami sok tulajdonságában hasonlít Gödel eredeti részstruktúra modelljeire is. Igen nehéz problémát kapunk például akkor, ha Ψ az a nagy-számosság axióma, hogy „van Woodin-számosság" és megköveteljük, hogy az előálló részstruktúrában teljesüljön, hogy „van nem Lebesgue-mérhető projektív halmaz". Szintén nemtriviális problémákhoz vezet, ha még erősebb nagy-számosság axiómákból indulunk ki és az előbbi követelmény bizonyos általánosításait írjuk elő.

A $\Psi =$ „van mérhető számosság" axióma esetében Gödel konstrukciójának helyes általánosítását Solovay fedezte fel, majd Kunen és Silver vizsgálta tovább. A Belső Modell Program ezekkel az eredményekkel kezdődött.

Az a tény, hogy végtelen sok Woodin-számosság létezéséből következik az összes projektív halmaz Lebesgue-mérhetősége, erősen valószínűvé tette, hogy hasonló feltételekből a projektív meghatározottság is bizonyítható. Ezt, a Belső Modell Programban kifejlesztett technikákat használva, Martinnak és Steel-nek 1985-ben sikerült is megmutatni. Meglepő módon, a Woodin-számosságok bevezetését motiváló kombinatorikus tulajdonságok – például azok, amelyek az összes projektív halmaz mérhetőségét biztosítják – semmilyen szerepet nem játszottak ebben a meghatározottsági bizonyításban.

Tétel (Martin–Steel). *Tegyük fel, hogy végtelen sok Woodin-számosság létezik. Ekkor minden projektív halmaz meghatározott.* ∎

Hogyan használhatók a nagy számosságok a meghatározottsági bizonyításokban? A stratégia hasonló ahhoz, ahogy Martin bizonyította az összes Borel-halmaz meghatározottságát, bár még pontosabb mintapélda az, ahogy Martin az analitikus halmazok meghatározottságát bizonyította mérhető számosság létezéséből: Adott $A \subseteq [0,1]$ halmazhoz hozzárendelünk egy $A^* \subseteq Z^{\mathbb{N}}$ nyílt halmazt, ahol Z egy olyan (gondosan konstruált) diszkrét tér, melyre teljesül, hogy az A^*-hoz tartozó játék meghatározottságából következik az eredeti A halmaz meghatározottsága is. A Gale–Stewart-tétel értelmében A^* meghatározott, így, mint előbb, ebből A meghatározottsága is következik. Egy tipikus A projektív halmazhoz tartozó Z *nagyon* nagy, akkora, hogy létezését csak egy megfelelő nagy-számosság axióma biztosítja.

A projektív meghatározottság és a nagy-számosság axiómák között lényegi kapcsolat van. Ezt az állítást alátámasztja a következő, 1987-ből származó tétel, mely azt is mutatja, hogy ezúttal a kép már helyes.

Tétel (Woodin). *A következő két állítás ekvivalens:*

1. *Projektív meghatározottság.*
2. *Minden $k \in \mathbb{N}$-hez van egy megszámlálható és tranzitív M halmaz úgy, hogy*

$$\langle M, \in \rangle \models ZFC + \text{„van } k \text{ darab Woodin-számosság''},$$

továbbá M megszámlálhatóan iterálható. ∎

A megszámlálható iterálhatóság egy a Belső Model Programból származó technikai fogalom.

A Belső Modell Programnál ambíciózusabb *Gyökmodell Program* Dodd és Jensen úttörő munkájával vette kezdetét. Ez a program annyiban ambíciózusabb, hogy a Belső Modell Programban szereplő részstruktúrákat anélkül próbálja megkonstruálni, hogy feltenné a (megfelelő) nagy-számosság axiómát a kiindulási struktúrára.

A Gyökmodell Program Woodin-számosságokra való kiterjesztése elsősorban Steel érdeme, ld. [14]. Ezzel az előrelépéssel világossá vált, hogy a projektív meghatározottság sok olyan kombinatorikus állításból is következik, amelyeknek látszólag semmi közük nincs e területhez, vagy, másképp fogalmazva, a projektív meghatározottság szinte mindenütt felbukkan a halmazelméletben.

Ez csak egyik speciális megjelenése egy mindent átható halmazelméleti jelenségnek, ami szerint az egyes állításokat lineárisan sorbarendezhetjük aszerint, hogy milyen nagy-számosság axiómákkal ekvikonzisztensek. Erre a jelenségre napjainkban számos példa ismeretes. Kezdetben az ilyen eredmények bizonyítására Jensen *fedési lemmáját* használták. Sőt, a fedési lemma használatával állítások egy meghökkentő sokaságáról mutatható ki, hogy implikálják az analitikus halmazok meghatározottságát. További részleteket illetően ezzel kapcsolatban [7]-re utalunk.

Egy újabb példában viszont, ahol a Gyökmodell Program módszereit a projektív meghatározottság igazolására használták, olyan axiómák szerepelnek, melyek a kontinuum-problémát úgy próbálják megoldani, hogy a kontinuum-hipotézist explicit módon hamissá teszik.

7. Forszolási axiómák

A *forszolási axiómák* lényegében *Baire kategória-tételének* különféle általánosításait posztulálják, de Cohen ZFC-modellek bővítésére szolgáló módszerének technikai vonatkozásai is szorosan összefüggnek ezekkel az axiómákkal.

Tegyük fel, hogy $\langle M, E \rangle \models ZFC$. Az $\langle M, E \rangle$-hez tartozó Cohen-bővítések megfelelnek az $\langle M, E \rangle$-beli teljes Boole-algebráknak, azaz olyan $b \in M$ elemeknek, melyekre

$$\langle M, E \rangle \models \text{„} b \text{ egy teljes Boole-algebra''}.$$

Ha b triviális, például, ha

$$\langle M, E\rangle \models \text{„}b \text{ egy véges Boole-algebra''},$$

akkor a megfelelő kiterjesztés azonos az $\langle M, E\rangle$ struktúrával. Ha viszont például

$$\langle M, E\rangle \models \text{„}b \text{ a } \Pi_{\omega_2}[0,1] \text{ szorzattér mértékalgebrája''},$$

akkor a kontinuum-hipotézis szükségképpen *hamis lesz* a megfelelő kiterjesztésben[2]. Ennek a bővítésnek egy további igen érdekes tulajdonsága, hogy létezik benne olyan σ-additív mérték $\mathbb{R}^3$-on, amely kiterjeszti a Lebesgue-mértéket, invariáns az egybevágósági transzformációkra és amely szerint minden projektív halmaz mérhető. Ebben a bővítésben tehát igaz, hogy

$\mathbb{R}^3$ egységgömbjének nincs olyan paradox átdarabolása, amiben minden rész projektív halmaz.

Ezt a bővítést néha *Solovay-bővítésnek* is nevezik, mert először Solovay vezette be és vizsgálta.

Legyen Ω egy kompakt Hausdorff-tér. Egy $O \subseteq \Omega$ nyílt részhalmaz reguláris nyílt, ha megegyezik saját lezártjának belsejével. Ω reguláris nyílt részhalmazai (a halmazelméleti tartalmazás szerinti parciális rendezéssel) teljes Boole-algebrát alkotnak, amit Ω *reguláris nyílt algebrájának* nevezünk. Cohen eredeti bővítését egy olyan $b \in M$ segítségével definiálta, melyre

$$\langle M, E\rangle \models \text{„}b \text{ a } \Pi_{\omega_2}[0,1] \text{ szorzattér reguláris nyílt algebrája''}.$$

Ennek a bővítésnek érdekes tulajdonsága, hogy igaz benne a Baire-féle kategóriatétel következő általánosítása:

A $[0,1]$ egységszakasz nem áll elő $\aleph_1$ darab első kategóriájú halmaz uniójaként.

Az Ω kompakt Hausdorff-tér eleget tesz a *megszámlálható antilánc feltételnek* (vagy rövidebben: Ω MAF tulajdonságú), ha benne minden páronként diszjunkt nyílt halmazokból álló halmazrendszer megszámlálható.

Martin axiómája ω_1-re: Tegyük fel, hogy Ω egy MAF tulajdonságú kompakt Hausdorff-tér. Ekkor Ω nem áll elő $\aleph_1$ darab első kategóriájú részhalmazának uniójaként. (Ezt az axiómát $MA_{\aleph_1}$-el jelöljük.)

Az ilyen axiómák egyik motivációja az, hogy amennyiben a kontinuum-hipotézis hamis, akkor az $\aleph_1$ számosságú halmazok – amennyire csak lehetséges – viselkedjenek úgy, mint a megszámlálható halmazok.

Megkísérelhetjük ezt az axiómát tovább erősíteni úgy, hogy kompakt Hausdorff-tereknek egy nagyobb osztályáról kötjük ki, hogy nem állnak elő $\aleph_1$ darab első kategóriájú részhalmazuk uniójaként. Tetszőleges kompakt Hausdorff-tér azonban

[2] A mértékalgebra a Borel-halmazok Boole-algebrájának a nullamértékű halmazok ideálja szerinti faktora.

nem engedhető meg. A legnagyobb lehetséges osztályt Foreman, Magidor és Shelah találták meg. Hogy definiálhassuk ezt a térosztályt, szükségünk van ω_1 kofinális zárt részhalmazainak fogalmára: $C \subseteq \omega_1$ *kofinális zárt*, ha C zárt ω_1 rendezéstopológiájában és kofinális ω_1-ben.

Legyen $\mathcal{B}$ egy teljes Boole-algebra. Ekkor minden $S \subseteq \mathcal{B}$ halmaznak van egy $\wedge S$ legnagyobb alsó korlátja és egy $\vee S$ legkisebb felső korlátja.

Definíció (Foreman, Magidor és Shelah). Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ egy teljes Boole-algebra. $\mathcal{B}$ *megőrzi a stacionárius halmazokat,* ha a következő teljesül: ha b nullától különböző elem $\mathcal{B}$-ben és $\langle b_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ $\mathcal{B}$ elemeinek egy sorozata, akkor van olyan $0 < c \leq b$, melyre vagy $c \wedge b_\alpha = 0$ teljesül minden elegendően nagy α-ra, vagy van egy $C \subseteq \omega_1$ kofinális zárt halmaz úgy, hogy minden $\gamma \in C$-re

$$c \wedge \left(\wedge_{\alpha<\gamma} (\vee_{\alpha<\eta<\gamma} b_\eta)\right) \neq 0. \ \blacksquare$$

Tekintsük azokat a kompakt Hausdorff-tereket, melyek reguláris nyílt algebrája megőrzi a stacionárius halmazokat. A következő tétel szerint ez a legbővebb osztály, mellyel kapcsolatban remélhetjük, hogy $MA_{\aleph_1}$ kiterjeszthető rá.

Tétel (Foreman, Magidor és Shelah). *Tegyük fel, hogy Ω egy kompakt Hausdorff-tér úgy, hogy egyetlen nemüres, nyílt $O \subseteq \Omega$ halmaz sem áll elő $\aleph_1$ darab Ω-beli első kategóriájú halmaz uniójaként. Ekkor Ω reguláris nyílt algebrája megőrzi a stacionárius halmazokat.* $\blacksquare$

Ez a tétel az alábbi (ZFC-ből persze nem bizonyítható) axióma bevezetését sugallja, amit MM-el fogunk jelölni (MM a „Martin Maximuma” kifejezés rövidítése).

[2] főtétele szerint MM konzisztens ZFC-vel, feltéve hogy bizonyos nagyszámosság axiómák nem mondanak ellent ZFC-nek.

Martin Maximuma: Tegyük fel, hogy Ω egy kompakt Hausdorff-tér, melynek reguláris nyílt algebrája megőrzi a stacionárius halmazokat. Ekkor Ω nem áll elő $\aleph_1$ darab első kategóriájú részhalmaza uniójaként.

A forszolási axiómákból – definíciójuk szerint – a kontinuum-hipotézis tagadása rögtön következik. Martin Maximuma (ellentétben a nála gyengébb $MA_{\aleph_1}$-gyel), ennél sokkal több információt ad a kontinuum méretéről.

Tétel (Foreman, Magidor és Shelah). *Tegyük fel, hogy Martin Maximuma igaz. Ekkor* $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. $\blacksquare$

Későbbi vizsgálatok feltárták, hogy ez a tétel majdnem minden olyan forszolási axiómára fennáll, amely lényegesen erősebb, mint $MA_{\aleph_1}$. Érdekes módon tehát, ha ragaszkodunk ahhoz, hogy az $\aleph_1$ számosságú halmazok hasonlítsanak a megszámlálható halmazokhoz, akkor elkerülhetetlenül igaz lesz $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ is.

A projektív meghatározottság bizonyításánál használt nagy-számosság axiómák lényegesen gyengébbek, mint azok, melyekből MM konzisztenciáját látták be. Ezért természetes sejtés, hogy MM-ből *következik* a projektív meghatározottság, noha MM *nem* tekinthető nagy-számosság axiómának – legalábbis a szokásos értelemben véve.

Már korábban említettem, hogy a projektív meghatározottságnak pontosan megfelelő nagy-számosság axiómák felfedezését Foreman, Magidor és Shelah MM-mel kapcsolatos munkái inspirálták. Ezért a következő tétel talán igazán jellemző módon zárja le a történet első felét. Egy kicsit erősebb változatot mondok ki, ami MM-nek csak egy gyengítését használja. A gyengítés (melyet MM_c-vel jelölünk) azt mondja ki, hogy Martin Maximuma érvényes minden olyan kompakt Hausdorff-térre, melynek reguláris nyílt algebrája megőrzi a stacionárius halmazokat és amelynek van legfeljebb c számosságú bázisa. Tehát MM_c csak viszonylag „kis méretű" kompakt Hausdorff-terekre vonatkozik.

Tétel (Woodin). *Tegyük fel, hogy MM_c igaz. Ekkor a projektív meghatározottság is igaz.* ■

Erre a tételre mindmáig közvetlen bizonyítás nem ismert. A tétel bizonyítása úgy történik, hogy a Gyökmodell Programban kifejlesztett módszereket alkalmazva megmutatjuk, hogy ha MM_c igaz, akkor minden $n < \omega$-hoz van olyan megszámlálható és tranzitív M halmaz, melyre

$$\langle M, \in \rangle \models \text{„Van } n \text{ darab Woodin-számosság"},$$

továbbá M megszámlálhatóan iterálható.

A projektív meghatározottság az ilyen halmazok létezéséből úgy következik, hogy alkalmazzuk azt a korábbi tételt, ami egységesíti a nagy-számosságokat és a projektív meghatározottságot. Ugyanezt az indirekt módszert lehetett használni arra is, hogy a projektív meghatározottságot bebizonyítsuk egy sor olyan kombinatorikus állításból, melyek (Martin Maximumához hasonlóan) nem kapcsolódnak nyilvánvaló módon a projektív halmazokhoz. Az ilyen eredmények nagy száma indokolja állításunkat, mely szerint a halmazelméletben a projektív meghatározottság mindenütt felbukkan.

A projektív halmazok elméletének jelenlegi állapotát végülis az alábbiak szerint foglalhatjuk össze:

- A projektív meghatározottság a **helyes** axióma a projektív halmazok számára; a ZFC axiómák nyilvánvalóan, sőt alapvető módon nem teljesek.
- Ha feltesszük a projektív meghatározottságot, akkor a kiválasztási axiómának nincs lényeges szerepe $\langle H(\omega_1), \in \rangle$-nak (vagy, ami ugyanaz, a másodrendű számelmélet $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \rangle$ sztenderd modelljének) vizsgálatában.
- A projektív meghatározottságot feltételezve a projektív halmazokkal kapcsolatban csak olyan eldönthetetlen (azaz független) problémák ismeretesek, melyek analógiába állíthatók a számelmélet ismert megoldhatatlan problémáival, vagyis a Gödel-mondatokkal és a konzisztenciával kapcsolatos különféle állításokkal.

Röviden összefoglalva a következő analógia áll fenn a vizsgált struktúrák és axiómáik között[3].

$$\text{Peano axiómák} \quad / \quad \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$$

$$\sim$$

$$\text{Projektív meghatározottság} + \text{Peano axiómák} \quad / \quad \big\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \cdot, \in \big\rangle.$$

A $\big\langle H(\omega_1), \in \big\rangle$ struktúra helyes axiómáinak felfedezése közben sok új ismeretet szereztünk. Vajon ki lehet-e terjeszteni ezt a tudásunkat olymódon, hogy jobban megértsük a $\big\langle H(\omega_2), \in \big\rangle$ struktúrát is? Ez a kérdés lesz a fő témája cikkünk második és egyben befejező részének.

Hivatkozások

[1] P. Cohen, *Set Theoty and the Continuum Hypothesis,* Benjamin (New York, 1966).

[2] M. Foreman, M. Magidor and S. Shelah, Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters, *Ann. of Math.*, **127** (1988), 1–47.

[3] H. Friedman, Higher set theory and mathematical practice, *Ann. of Math. Logic,* **2** (1971), 325–357.

[4] D. Gale and F. Stewart, Infinite games with perfect information, in: *Contributions to the theory of games* (Harold W. Kuhn and Alan W. Tucker, eds.) Ann. of Math. Stud., vol. 28, Princeton University Press, Princeton (NJ, 1953) pp. 245–266.

[5] K. Gödel, The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the axioms of set theory, *Ann. of Math. Stud.*, vol. 3, Princeton University Press, Princeton (NJ, 1940), pp. 33–101.

[6] K. Gödel, What is Cantor's continuum problem? *Amer. Math. Monthly,* **54** (1947), 515–545.

[7] A. Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,* Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag (Berlin, 1994).

[8] N. Luzin, Sur les ensembles projectifs de M. Henry Lebesgue, *C.R. Hebdomadaires des Seances Acad. Sci. Paris,* **180** (1925), 1572–1574.

[9] D. Martin, Borel Determinacy, *Ann. of Math.*, **102** (1975), 363–371.

[10] D. Martin and J. Steel, A proof of projective determinacy, *J. Amer. Math. Soc.*, **2** (1989), 71–125.

[11] Y. Moschovakis, Descriptive Set Theory, *Stud. Logic Fund. Math.*, vol. 100, North-Holland (Amsterdam, 1980).

[12] J. Mycielski and H. Steinhaus, A mathematical axiom contradicting the axiom of choice, *Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math., Astron. Phys.*, **10** (1962), 1–3.

[3] Itt a projektív meghatározottság precíz formalizálása magába foglalja a Σ_0-helyettesítési axiómasémát is.

[13] R. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Ann. of Math.*, **92** (1970), 1–56.

[14] J. Steel, The Core Model Iterability Problem, *Lecture Notes Logic,* vol. 8, Springer-Verlag (Heidelberg, 1996).

[15] W. Hugh Woodin, The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal, *Ser. Logic Appl.*, vol. 1, de Gruyter (Berlin, 1999).

W. Hugh Woodin: The Continuum Problem, Part 1.

Abstract This is the Hungarian Translation of the first part of an article of Hugh Woodin. The paper surveys classical and more recent results and methods in connection with the continuum problem. The aim of the paper is to draw a picture about the subject for a nonspecialist mathematician.

RÉDEI – SZUBJEKTÍV EMLÉKEK TÖRTÉNELMI HÁTTÉRBEN

WIEGANDT RICHÁRD*

Rédei László (1900–1980) szegedi egyetemi tanár, kétszeres Kossuth-díjas akadémikus. Jelentős eredményeket ért el főleg az algebrában és a számelméletben. Nagy hatású oktató és kutató, a hazai absztrakt algebrai kutatások megalapozója.

*

Szikár, magas, ötven év körüli őszülő úr lépett mosolyogva a zsibongó előadóterembe. Igen jó megjelenésű volt, csokornyakkendőt viselt. Két kezével jelezte, hogy álljunk fel, majd meghajtva magát üdvözölte a hallgatókat. 1951. szeptember 3-a, hétfő reggel 8 óra. Életem első egyetemi előadását Rédei László egyetemi tanár tartotta. A Szegedi Tudományegyetem TTK kis előadóterme a korszaknak megfelelően volt dekorálva: „a párt a mi eszünk, becsületünk, világos jelenünk és ragyogó jövőnk", olvashattuk a falra gombostűzött papírbetűkből kirakott feliratot. Elegáns megjelenésében, udvarias viselkedésében Rédei bennem a „régi értelmiségi" benyomását keltette, akit pótolhatatlan szaktudása miatt még megtartottak. Tudtam, hogy országszerte csaptak el akkortájt neves professzorokat, főleg a társadalomtudományok köréből – nem tudtam, hogy Rédei a szegedi egyetem egyik büszkesége.

A kétszer egyórás előadás keserves nyögdécseléssel telt el, szándéka szerint útmutatást adott volna a hallgatóknak. „...Mmm, mit is mondjak? ...Önök most frissen érettségizve azt hiszik, hogy mindent tudnak ...Majd meglátják, hogy semmit sem tudnak... A matematika nem számokkal, hanem mindennel foglalkozik ...Meg kell tanulniuk jegyzetelni is, mert azt sem tudnak ...Engem könnyen lehet jegyzetelni ..."

Ellentétben az analízist előadó Kalmár professzor első előadásával, Rédei bemutatkozása kiábrándító és kétségbeejtő volt. Egy hónap múlva azonban már világosan láttuk azt, ami egyetemi éveink alatt csak megerősödött bennünk, hogy Rédei a legkiválóbb előadó. Előadásai egyáltalán nem voltak retorikusak, minden mondatát, sőt szavát megrágta, gondolatmenete világos és érthető volt. A fontos jegyzetelnivalót vagy a táblára írta, vagy a katedra szélén kimerevedve szinte diktálta. Magyarázó, motiváló, vagy kitekintést nyújtó megjegyzéseihez a tábla félreeső részét használta. A gyengébbek is könnyen elsajátították az előadott anyagot,

---

*Elhangzott a Rédei László emlékére rendezett konferencián, Szegeden 2000. november 18-án.

a jobbak számára külön kitekintést, útmutatást nyújtott. Nem csodáltatta magát, hanem szolgálta a hallgatóságot. Nagy hatású professzor és lelkes kutató volt. Valósággal vonzotta a tanítványokat, bárki, bármikor közvetlenül hozzá fordulhatott, beeshetett a folyosóra nyíló professzori szobájába, akárcsak a többi matematikaprofesszorhoz. (Ez nem minden intézetben volt így.) Nem véletlen, hogy az 1945 és 1960 között létrejött magyar algebrai iskola tagjainak a fele, Szele Tibort is beleértve, Szegedről indult, az akkoriban Szegedről kikerült kutató matematikusoknak pedig a fele algebrista lett.

*

1940-ben nevezték ki a Ferenc József Tudományegyetemre nyilvános rendkívüli tanárnak, 1941-től nyilvános rendes tanár a Horthy Miklós Tudományegyetemen, majd a Szegedi Tudományegyetemen és végül a József Attila Tudományegyetemen. Talán felesleges megjegyeznem, hogy mindvégig ugyanannak az egyetemnek volt professzora.

*

Sokak szemében mintaképe volt a szórakozott professzornak. Anekdoták keringtek róla. Ehhez persze nagymértékben hozzájárult a harmincas éveinek közepétől meglévő nagyothallása. Politikailag rázós időkben a nagyothalló információhiányban szenved. A sajtó hírei egyoldalúak, hamisak, a másik fél rövidhullámú adásait zavarják, nagyothalló nem érti. Süketnek nem lehet bizalmas értesülést a fülébe súgni, vagy hivatalos álláspontot gúnyos felhanggal tülkölni.

Közéleti szereplésre ezért nem nagyon lett volna alkalmas, de nem is vágyott rá. Hatalomvágy sem volt benne. Tudományos teljesítménye, kiváló oktató és utánpótlásnevelő munkája révén pozíciója stabil, kikezdhetetlen volt. Tudta, hogy tudományos karrierjéhez nem kell politikailag riszálnia. A negyvenes évek végén egy évig dékán volt. Akkoriban egyetemi előadásai után a dékáni hivatal munkatársai a folyosón várták, hogy aláírassák vele az aláírandókat, mielőtt hazasietett volna. A Bolyai Intézetnek, az egyetemnek az irányításába, meg a matematikai közéletbe professzoroknak beleszólása akkortájt nem igen volt, neki pláne nem. Ez azzal az előnnyel járt, hogy nem kellett tennie, sőt meg sem kellett hallania olyat, amit nem akart. Hátránya az volt, hogy nem segíthetett másokon. Megalapozta és létrehozta ugyan a magyar algebrai iskolát, de nem hozott létre algebrai lobbyt, máig sincsen.

*

Első év végén féléves anyagból kollokváltunk Rédeinél. Nagyon jól felkészültem, és végig korrepetáltam csoportunk gyengébb tagjait is. A tanulócsoport egy napon vizsgázott, névsor szerint. Zsinórban mindenki jelesre kollokvált.

– Nagyon szépen felkészültek, de ki fogok kapni a Tanulmányi Osztálytól, hogy ennyi jelest adtam – mondta az előttem kollokváló felelete előtt.

Szőrözött vele, de a végén mégis

– megadom a jelest – volt a verdikt.

Első tételem a lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága volt.

– Feltehető, hogy az első egyenlet első együtthatója, a_{11} nem nulla – mondtam.

Ebbe belekötött. Húsz percig győzködtük egymást.

– Kolléga úrnak azt kellett volna mondania, hogy az egyenletek felcserélésével és az ismeretlenek átszámozásával *elérhető,* hogy a_{11} nem nulla.

Ezután már simán lezajlott a vizsgám.

– Megadom a jót.

Utánam egy Balástyáról bejáró hallgató következett. Pillanatok alatt kirúgta.

Két évvel később másként történt. Akkor már elkezdtem a kutatómunkát, és eredményemről pályamunkát nyújtottam be a Karhoz. A pályázat ugyan jeligés volt, de matematikából csak én írtam pályamunkát. A tanév végén geometria alapjaiból vizsgáztunk Rédeinél. Tetszett az anyag is, az előadások is jók voltak, de a felkészülést több körülmény zavarta. Nehéz vizsgák után voltunk (pl. valós függvénytan, komplex függvénytan, valószínűségszámítás, hogy csak a matematikai kollokviumokat említsem), kevés volt az idő, a kollokvium előtti, a felkészülésben döntő napon (1954. június 29.) napfogyatkozás volt, este pedig Uruguayt verte ki a magyar csapat az svájci futball-világbajnokságon. Egyik vizsgatételként a térbeli Desargues-tételt kaptam, amit pontatlanul mondtam ki.

– Kolléga úr természetesen úgy gondolja, hogy ... – segített ki Rédei.

Egy-két mondat után félbeszakított.

– Öröm hallgatni, ne is folytassa, természetesen jeles.

Ezután algebrai tárgyú pályamunkám felől érdeklődött.

*

Az alábbi történetet Szendrei Jancsi is megerősítette. Előttem járó mat-fizesek klubestjén, talán 1950-ben, jelenetet adtak elő, amelyben Rédeit és Kalmárt utánozták. A nézők, köztük tanárok, tanársegédek, dűltek, borultak a nevetéstől.

– Te Laci – kérdezte Rédei a mellette ülő Kalmárt, – ki az a másik?

– Az én vagyok – felelte büszkén Kalmár.

– Azt tudom, de a másik kicsoda?

*

Felköpök $m \times n$ elemet, ez egy mátrix.

Ha a számelmélet szimfónia, akkor $|$, az oszthatóság jele a vezető hangjegye.

A matematikus művész a jelölésekben.

A matematikus végtelenül lusta.

A 2-es a számelmélet fenegyereke.

Néhány méternyi pontossággal meg tudnám mutatni azt a helyet, ahol a Moivre-képletre rájöttem a gimnáziumból hazafelé menet.

(Páratlan tökéletes számok, nagy Fermat-tétel) Óva intem minden hallgatómat, hogy ilyen problémákkal foglalkozzék. Fiatalnak nem szabad ilyen speciális kérdésekkel foglalkoznia.

Leborulok a lánctört nagysága előtt.

Hülyeséget is tanítanak a középiskolában.

(Asszociativitás) „Tanító bácsi csacsiságot kérdez, mert nem definiáltuk a háromtényezős szorzást."

A matematika reszket az invariánsokért.

Ha a kalapomra az van írva, hogy algebra, akkor azt mélyen megemelem a geometria előtt.

Bolyainak nem volt igaza, amikor azt mondta, hogy a semmiből egy új világot teremtett. A való világot ismerte meg jobban.

„Egy tábla csoki és reggelre kész a bizonyítás", mondta volna erre Neumann János.

A matematika műveléséhez egy gömbre és két félgömbre van szükség (Sitzfleisch).

(Vizsgaeredmények kiértékelésekor) Mmm ... mit is mondjak? Hulla vagyok.

(Elhúzódó kollokváltatáskor) Az ember hólyagszakadást kap.

*

Szegeden a „református palotában" lakott a „Bruckner sarok" mellett. Úgy '52 táján közlekedési rendőrök kezdték vigyázni a kihalt város forgalmát. Rédei szokása szerint átlósan ment át az Anna Kútnál. A rendőrnő megállította.

– Így nem szabad átmenni, csak derékszögben.

– Hogyan kérem?

– Derékszögben – és mutatta.

– Ja úgy! Pi-fél alatt!

*

Egyetemista koromban hallottam, hogy Rédei lánya, Annika is vetett fel tudományos problémát gimnazista korában. Polinomokból való gyökvonást tanulva látta, hogy a tagok száma (teljes négyzet esetén) csökken. Vajon elképzelhető-e, hogy a tagok száma négyzetre emeléskor csökkenjen?

Rédei dolgozatai között e kérdésnek nyomát sem leltem. Írt viszont ilyen témájú dolgozatot Rényi Alfréd a *Hungarica Acta Mathematicában* (**1** (1947), 30–34), és 1945 májusára datálja a következőt: „L. Rédei proposed the following problem. Let the number of terms of a polynomial be given. Find the minimal number of terms of its square."[1] Rényi dolgozatában becslést ad, a kérdést is ennek megfelelően fogalmazza. A dolgozatot Rédei referálta a Zentralblattban (30, S.114), ahol a problémát eredeti formájában vetette fel: „Gibt es Polynome $f(x)$, bei denen das Quadrieren die Gliederzahl vermindert?"[2] Az igenlő válaszra Rényi dolgozatában példát is ad.

[1] Rédei vetette fel a következő kérdést. Legyen adott egy polinom tagjainak a száma. Találjuk meg négyzete tagszámának a minimumát.

[2] Léteznek-e olyan $f(x)$ polinomok, amelyeknél a négyzetre emelés a tagszámot csökkenti?

Akkoriban jobban érdeklődtek egymás munkája iránt a matematikusok. Az igazán nagyokra jellemző módon Rédei nemcsak szakterületének kutatóival tudott együttműködni, írt közös dolgozatot Rényi Alfréddal, Szőkefalvi-Nagy Bélával és Turán Pállal is.

*

1945-ben a magas beosztású értelmiségiek közül sokan beléptek *legalább egy* pártba. Ekkor lépett be Rédei a szoc-dem pártba. A két munkáspárt egyesülésekor egyeseket kiseperték, másokat beseperték. Így lett Rédei tagja *a* pártnak. Kilépni az öngyilkossággal lett volna egyenlő, 1957-ben persze sokadmagával nem lépett be az újonnan alakuló pártba.

1954 tavaszán a Geometria Alapjai című tárgyat Rédei adta elő, az előző őszön elhunyt Szőkefalvi-Nagy Gyulától örökölve, igen szépen. Ebből az előadásából írta a Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien című könyvét (1965). Amidőn a geometria felépítésében eljutott a párhuzamossági axiómáig és az azzal kapcsolatos trifurkációig, megjegyezte.

– Az, hogy az euklideszi, Riemann-, vagy Bolyai–Lobacsevszkij-geometria közül melyik érvényes, éppúgy eldönthetetlen, mint az, hogy a világ teremtett-e, vagy öröktől fogva való.

Még a kemény Rákosi rendszerben éltünk, amit mondott, blaszfémiának számított.

*

Minkowski–Hajós-tétel címmel tartott speciál-előadást Rédei 1955 tavaszi félévében, szombatonként reggel 8-kor. Egy alkalommal bejött, meghajolt, a táblához lépett, elkezdte mondani és írni.

– Es sei gegeben eine endliche abelsche Gruppe ...

Néhány mondat után vette csak észre, hogy nem magyarul beszélt.

Egy másik alkalommal bizonyos rácspontok nem kollineáris elhelyezkedését így jellemezte:

– Csak férfiak vagyunk itt: olyan ez, mint az ökörhugyozás.

*

1955. március 15-én „nagy" Kossuth-díjat kapott, kétszeres Kossuth-díjas lett. (Az 50 000 Ft-ot kicsit megtoldva egy emeletes ház felső traktusát vette meg Szegeden.) Nemcsak az egyetem, de Szeged városa is büszke volt rá. Fényképe megjelent a helyi és az országos sajtóban egyaránt, a legendás Liebmann Béla fotóművész, mint a Fényszöv alkalmazottja, kijött az egyetemre felvételeket készíteni róla.

Két-három héttel később az egyetem sakkcsapata egy másik szegedi csapattal mérkőzött. Rédei a mellettem lévő táblán játszott. Kezdés előtt a játékosok bemutatkoznak partnereiknek, és kiállítják a játszmalapot. Ellenfele visszakérdezte Rédei nevét, látszott, hogy sohasem hallott róla.

Ekkor döbbentem rá, hogy mennyire ismeretlenek maradnak a tudomány ünnepelt nagyjai.

*

1955 tavaszán Szele Tibor Szegedre jött Kalmár Lászlót köszönteni 50. születésnapján. Szegedi tartózkodása alatt visszaesett az influenzába, és életét még a híres Hetényi vezette belklinikán sem tudták megmenteni. 37 éves sem volt, mikor meghalt.

– A halál derékban törte ketté pályáját – szörnyűlködött valaki.

– Nem derékban, valamivel alatta – javította ki a precíz Rédei.

*

Kertész Bandi Szele Tibor aspiránsa volt az 50-es évek elején, de elvették tőle, mert mindketten vallásos reformátusok voltak. Így lett Rédei Kertész aspiránsvezetője.

Egy alkalommal Kertésznével, Iluskával beszélgetett. Mikor szóba került, hogy Iluska édesapja református teológiai tanár Debrecenben, akárcsak Szele Tiboré, így szólt.

– Igen? Egy időben én is voltam református.

Mezőtúron a református gimnáziumba katolikusként nem nevezték volna ki tanárnak.

*

Ugyancsak Kertésztől hallottam a következő sztorit, amelyet szegedi körökben máig is emlegetnek. Az 50-es években a párttaggyűléseket vasárnaponként tartották, hogy ezzel is nehezítsék a tagok templomba járását. Taggyűlés után a párt-liturgia szerint elénekelték az internacionálét. Az ének befejezése után beállott hirtelen csendet Rédei törte meg, amint a nagyothallókra jellemző hangerővel megkérdezte a mellette álló professzorfeleségtől.

– Méltóságos asszony is a jezsuitákhoz jön misére?

A Horthy-rendszerben az állami alkalmazottakat fizetési osztályokba sorolták, bizonyos fizetési osztály elérése nagyságos, méltóságos, illetve kegyelmes címmel járt. Egyetemi tanárok, havi 1000,- P fizetéssel méltóságos urak voltak, sőt, néhány kiemelkedő gimnáziumi igazgató, vagy tanár is eljutott eddig a címig. A miniszterek kegyelmes urak voltak. Persze a fűszeres minden úriasszonyként öltözködő nőt nacsasasszonynak szólított. Az 50-es években mindez gyökeresen megváltozott. Amikor '52-ben az Ady téri épület üres lépcsőházában kezétcsókolommal köszöntem a Tanulmányi Osztály vezetőjének, aki mellesleg professzorom felesége volt (méltóságos asszony!), így fogadta:

– Szabadság, Wiegandt elvtárs.

*

Fenyő Pista anekdotázta a következő esetet. Valamikor az 50-es években egy akadémiai bizottsági ülésen, ahol – vélem – Fenyő befolyásos ember lehetett, valamilyen személyi kérdésben heves vita alakult ki. A nyílt szavazáskor egyenlő arányban oszlottak el a szavazatok, de Rédei nem szavazott. Az elnöklő Alexits odament Rédeihez.

– Laci, szavaznod kell, mert a te szavazatod dönt.

– Hogy mi van?

Alexits megismételte még hangosabban, még tagoltabban.

– Hogy nyissuk ki az ablakot?

– Igen vagy nem? – harsogta rekedt hangján Alexits.

– Természetesen igen.

*

Erős dohányos volt, felesége is. Sellőt szívott, a legolcsóbb, de nem igazán erős cigarettát.

*

Rédei a Humboldt-ösztöndíjat még a hitleri gleichschaltolás előtt megkapta, de csak később ment Göttingenbe. Ezt utóbb kicsit restellte. Pedig tiszteletre méltó okból halasztotta el németországi útját. Erről Illésy István ny. középiskolai tanár, egykori mezőtúri tanítvány így számol be.

„Tudományos elismerését jelezte, hogy külföldi ösztöndíjat kapott. ...nyolc évig voltunk a kezében. ... Bejött, felállt az osztály. A katedra elé álltam, s az osztály nevében kértem, ne menjen el, ne hagyjon itt érettségi előtt bennünket. Eltűnődött, majd kis idő múlva megszólalt: „Nem megyek el, itt maradok." És szavának állott." (Zsuffa Lajos (szerkesztő): *Rédei köri előadások 1988–1990*, Tiszakécske, 1990).

*

Kitűnően, választékosan beszélt németül, szép, veretes stílusban írt. Még egyetemista koromban hallottam, hogy fiával, Lalival csak németül beszélt. Később ezt nekem megerősítette. Nem tanult meg viszont németül szájról leolvasni. Többször előfordult, hogy magyarul tolmácsoltuk, amit német szájról nem tudott leolvasni, majd kapásból németül válaszolt. 1959-ben a lajosforrási konferencián Kochendörferékkel beszélgetett.

– Vérnyomás – tolmácsoltam.

– Ja, Blutdruck, ... – folytatta németül a beszélgetést.

*

In Gespräch mit Herrn Rédei benutzte Herr Weinert ein selten vorkommendes Wort, und fragte, ob Herr Rédei dieses Wort kenne.

– Natürlich kenne ich das Wort. Ich kenne alle deutsche Wörter – antwortete er.

Nach einer kurzen Weile:

– Fast alle, ... aber so ist die Aussage trivial.[3]

*

1958-ban nyugati kiutazási ügyben kihallgatást kért a belügyminisztertől. Az 1956. november 4-én alakult Kádár–Apró–Dögei-kormányban[4] Münnich Ferenc volt a belügyminiszter, majd 1957 folyamán Münnich miniszterelnökké lépett elő, és Biszku Béla lett a belügyminiszter. A kihallgatáson Rédei egyszer csak azt mondja.

– Érdekes, Münnich elvtárs egészen másként néz ki életben, mint fényképen.

– Én nem Münnich elvtárs vagyok – válaszolja Biszku.

– Hát nem a belügyminiszterrel beszélek?

*

Hatvanas éveiben pár kilót, nem sokat, felszedett. Mikor ezt Hajós észrevételezte, így felelt.

– Kappanháj.

Sokat dolgozott a Minkowski–Hajós-tétel bizonyításának egyszerűsítésén és a véges Abel-csoportok faktorizációján. Erről adott elő egy akadémiai felolvasóülésen '66 táján.

– Mikor elmondtam Hajósnak, azt kérdezte „hogy nem vetted ezt eddig észre", ami azt jelentette, hogy lehettem eddig ilyen hülye.

*

1967-ben feladta szegedi egyetemi tanárságát, Budapestre költözött, a Matematikai Kutatóintézet Algebrai Osztályát vezette. Október 31-én, a szeminárium után megkérdezte Schmidt Tomitól és tőlem, hogy ki lesz a következő héten az előadó.

– Senki, elmarad.

– Hogy kicsoda?

– Senki.

– Senki? De miért?

– Mert ünnep lesz.

– Hogy mi lesz?

– Ünnep.

– Micsoda?

Tomi felírja a táblára: november 7.

– Hát miféle ünnep az?

---

[3]Rédeivel beszélgetve Weinert egy ritkán előforduló szót használt, és megkérdezte, hogy ismeri-e Rédei ezt a szót. – Természetesem ismerem, én minden német szót ismerek – válaszolta. Kis idő múltán: – Majdnem mindet, ... így viszont az állítás triviális.

[4]Apró Antal és Dögei Imre miniszterek voltak a Kádár-kormányban.

Kitört belőlünk a nevetés. Az 50. évforduló ünneplésére készült a szocialista tábor. A korabeli magyar helyesírás szerint a történelmi események nevét kisbetűvel írtuk, kivétel volt a Nagy Októberi Szocialista Forradalom meg a Nagy Honvédő Háború (l. A magyar helyesírás szabályai (1959), 125. paragrafusát).

*

Az *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* egy kötetét ajánlotta Alexits György 70. születésnapjára. Rédei nehezményezte, hogy egy évvel később, az ő 70. születésnapjára ilyen nem történt. Megígérték, hogy 5 év múlva dedikálnak neki is egy kötetet.

– Meg is kell azt érni – válaszolta.

Az volt a véleménye, hogy „öregkorára az ember hiú lesz". Természetesnek tartotta viszont, hogy „fiatal ember érvényesülni akar".

*

1970-ben Oberwolfachban a véges p-csoportok elméletéről beszélt, amit akkor kezdett kidolgozni. Nekem is lelkesen magyarázta, majd megjegyezte.

– Ez a harmadik szerelmem a matematikában. Azt mondják, hogy az első szerelem tüzes, a második tartós, a harmadik tragikus.

A véges p-csoportok elméletéről írt könyvének kéziratát 1977-ben adta le nyomdakész állapotban az Akadémiai Kiadónál. 1989-ban jelent meg. (A kiadó csak ráfizetéssel tudott könyveket kiadni, és deficitjét úgy csökkentette, hogy egyre kevesebb könyvet adott ki.)

A hetvenes évek első felében Huppert Budapesten járt. A szürkehályogműtét után lábadozó Rédeit a szemklinikán kereste fel. Huppert szkeptikus volt a véges p-csoportok leírását adó függvények kiszámíthatóságát illetően. Mindkettőjüknek igaza lett. 1998-ban Linzben magam láttam, hogy fiatal computer-algebristáknak egy teamje Rédei könyvét használja véges szintegyűrűk leírásához.

*

Oberwolfachban az a szokás, hogy minden konferencia-résztvevő névvel ellátott szalvétatokot kap. Tálaláskor a személyzet véletlenszerűleg helyezi a 6 személyes asztalokra a szalvétákat, így is elősegítve a résztvevők ismerkedését. Az egyik ebéd után így szólt.

– Mint egykor őseink, mi is nyugatra járunk kalandozni. Most például azért, hogy borjúhúst ehessünk.

Egyszer vacsorára hidegtálat szolgáltak fel.

– A májpástétom kitűnő volt. Érdekes, hogy asztalomnál senki sem vette ki, így mind a hat adagot én ettem meg.

– Az nem májpástétom volt, hanem csiga.

– Igazán? Akkor is nagyon finom volt.

*

Vonattal jöttünk haza. Bécsben át kellett szállnunk. Amint helyet keresve haladtunk a vagonok folyosóján, az egyik fülkéből kinyúlt egy kéz, megfogta Rédeiét, és kiszólt egy hang.

– Rédei Laci?

Szegő Gábor volt, 40 éve nem találkoztak. Egy hely még volt, Rédei odaült. Bruck táján Rédei átjött hozzám.

– Borzasztó, meg akarnak büntetni 500 Schillingre, mert lejárt a tranzitvízumom.

Akkoriban hivatalosan intézték a vízumoztatást, és adminisztratív hiba folytán az osztrák tranzitvízuma hamarabb járt le, még mielőtt átutazhatott volna Ausztrián. Este Stuttgartban odaadtuk a hálókocsi-kalauznak útlevelünket, reggel Bécsben visszakaptuk, ennyi volt számunkra a német–osztrák határátlépés.

– Kár volt megértened – pimaszkodtam, utalva nagyothallására.

– Igazad van, kár volt megértenem.

Ki kellett fizetnie a büntetést.

Győrött többen leszálltak, átültem az ő kupéjukba. Beszélgettek, kissé akadozva, többször is egymás családja után érdeklődve.

– A lányomnak viszem az esküvői ruhának valót, most megy férjhez harmadszor. A fiam Svédországban él, éppen válik. Csak mi, öregek tartunk ki egymás mellett.

*

1972-ben, kétéves pakisztáni UNESCO-professzorkodás után egy új Mercedesszel tértem haza. Egy téli délelőtt kandidátusi értkezés házi védésén voltunk a Műszaki Egyetemen. Utána felajánlottam Rédeinek, Steinfeld Ottónak, Szász Ferinek és Schmidt Tominak, hogy a sűrű hóesésben elviszem őket kocsin a Reáltanoda utcába. Rédei megcsodálta az új autómat.

– Ezt a szép, kényelmes kocsit is Pakisztánban vetted?

– Nem, Stuttgartban.

– Hol?

– Stuttgartban.

– Aha, Moszkvában.

*

1975-ben ő is résztvett a szegedi nemzetközi algebra konferencián. Az újszegedi Tóth vendéglőben étkeztünk. Az egyik ebédnél Rédeiné harsogva megkérte férjét.

– Laci, gombolja ki a melltartómat, mert szorít.

– Igen, Jolánka.

Vacsoránál matematikáról beszélgetve így szólt Rédei.

– Tudjátok mire születtem én?

– Mosogatásra – vágta rá felesége.

Rédei algebrai függvénytanra gondolt, Chevalley könyvének címe alapján. Ez iránt érzett nosztalgiát. Emlékszem, még egyetemista koromban ajánlotta Chevalley 1951-ben megjelent munkáját.

*

Szegedről Budapestre ideiglenesen a Széher útra költözött. Szász Ferivel segítettünk a költözködésnél. Két év múlva vett egy házrészt a Tárogató út 57-ben, ez lett utolsó lakhelye.

Szomorú öregkora volt. Négy évvel fiatalabb felesége hamarabb öregedett el testileg, szellemileg, akinek évtizednyi depressziója a 70-es években az ellenkezőjébe csapott, s fizikailag elnehezedett, legyengült. Lánya, Annika, háromszor vált el, többször kísérelt meg öngyilkosságot. Orvosnő volt, akit negyvenes éveinek elején leszázalékoltak, néha kisegítő labor-orvosként alkalmazták. Apja halála után, ha felkerestem a Tárogató úti házban, sűrű dohányfüstben találtam, magába roskadtan. Érezhető volt a közeli vég.

Lali fia már tinédzser korában Szeged legerősebb sakkozójának számított. 1954-ben kezdte vegyészként tanulmányait a Szegedi Egyetemen, amelyet Svédországban folytatott. Neves elméleti fizikus lett (L. B. Rédei), svéd feleségétől két kislánya született, akik jártak is a Tárogató úti házban. Lali a 70-es évek közepén meghalt, úgy hallottam, autóbuszbalesetben. Rédeinek nem mondták meg, haláláig titkolták, de azért ő sejthette az igazságot.

Lányától egy unokája volt, Andriska. Az érettségi után fényképésznek tanult, de állást nem vállalt, mondván, hogy ennyi pénzért nem hajlandó dolgozni. A közveszélyes munkakerülés bűntettét elkerülendő, nagyapjánál volt bejelentve háztartási alkalmazottként.

Törődést csupán öccsétől és annak fiatal feleségétől kaphatott. Imre nyugalmazott gépészmérnök volt, 1984-ben halt meg.

*

A 70-es évek második felében Rédeiné már kórházi ápolásra szorult. Bevitték a Kútvölgyi Kórház krónikus osztályára, azaz az elfekvőjébe. Rédei egyedül maradt a Tárogató úti házban. Ha családban élhetett volna, az utolsó pillanatig nem jelentett volna problémát. Így azonban rövidesen ő is beköltözött az elfekvőbe, a feleségével szomszédos kórterembe.

Amikor itt először meglátogattam, a fal felé fordulva feküdt, mintha aludt volna. Így teltek a napjai, mert mást nem tehetett. Olvasni, tévézni hályogműtétje óta nem tudott, rádiót süketsége miatt nem hallgathatott. A 4 személyes kórteremben betegtársai testileg, szellemileg leépült emberek voltak, akik rendszeresen ott haltak meg mellette. Számára már csak a matematika maradt. Biztatásunkra egy, a szubdirekt irreducibilis csoportokra vonatkozó problémával kezdett foglalkozni. Hoztuk, vittük neki a szükséges irodalmi információkat. Szépen haladt a munkában, de problémát jelentett az eredmények leírása. Először magnetofonra vettem, amit németül mondott. Ez a módszer nem vált be, mert nem tette lehetővé az utólagos igazítást, betoldást, visszatekintést. Inkább írni kezdett, bár írását alig látta, olvasni nemigen tudta.

Ekkor ismertem meg dolgozatírási technikáját, amely számomra elképzelhetetlen volt. A kész dolgozattal a fejében az írást a címnél kezdte, a bevezetéssel folytatta, és így tovább. Ha szükségessé vált, visszamenőlegesen betoldott, igazított. Megkérdeztem, korábban is így írta-e dolgozatait.

– Mindig.

A szubdirekt irreducibilis csoportokról elért eredményeit azonban már néhány évvel korábban más publikálta. Nem mondtuk meg neki, inkább kicsit húztuk az időt, beszélgettem, és főleg sakkoztam vele. Szerette az „üdítő partikat".

Felesége állapota tovább romlott. Rövidesen meg is halt. Az óbudai temető kolumbáriumában helyezték nyugalomra. A temetési beszédet egy asszony tartotta a Népfronttól.

Nem sokkal ezután Steinfeld Ottóval felkerestük Szentágothai Jánost, az Akadémia elnökét, kérve, hogy helyeznék el Rédeit például a máriaremetei Pedagógus Szociális Otthonban.

– Ez szinte lehetetlen, de megpróbálom.

Szavát állta, és jó félév múltán Rédei beköltözhetett volna az emberi körülményeket nyújtó otthonba. Ekkor azonban – csodálkozásunkra – orvosai nem engedték.

*

1980 elején beszámoltam neki, hogy szemináriumunkon Jiří Adámek prágai kolléga tartott előadást.

– Adámek, tipikus cseh név.

– Az – válaszoltam – de Austerlitznek hívták őket.

– Igen? Minket pedig Raidingernek.

Még születése előtt magyarosított a család. Raiding, magyarul Doborján, Liszt Ferenc szülőhelye Burgenlandban.

*

Húsvétkor a kórházból kocsin öccséhez vittem. Útközben beinvitáltam hozzánk. Mint mindig, akkor is elegáns volt.

– Jaj, nem vagyok én már szalonképes – szabadkozott Pirinek.

Azokban a napokban, április 4-én kapott egy matematikus állami díjat.

– Miért? De *miért?* – kérdezte, amikor értesült róla.

*

Rédei tekinthető az első absztrakt algebristának Magyarországon. Ezt ő elhárította, mondván, hogy az első Kürschák József volt (Kürschák nem volt algebrista, viszont legjelentősebb munkája az az egyetlen algebrai tárgyú dolgozata, amelyben az értékeléselméletet alapozta meg), azután meg Bauer Mihály (akinek az alternáló csoport egyszerűségére vonatkozó bizonyítását adta elő egyetemi előadásaiban). Mindenesetre Rédei oktatott először „modern algebrát" magyar egyetemen. (A történelmi hűség kedvéért: az 50-es években pl. a Szegedi Tudományegyetemen matematikát vagy fizikát csak mat-fiz, vagy fiz-mat szakos tanárjelöltként lehetett tanulni, absztrakt algebrát csupán a mat-fizesek hallgattak három féléven keresztül.)

Magát olyan algebristának jellemezte, aki „útszéli problémákkal foglalkozott, amelyeket mások nem vettek észre, vagy amelyek másoknak nem kellettek". Talán találóbb azt mondani, hogy elméletteremtő matematikus volt: egy-egy probléma felvetése és megoldása kapcsán kidolgozta, felépítette annak elméletét. Tipikus példák erre a *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen* (1963), a *Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern* (1970) és az *Endliche p-Gruppen* (1989) című könyvei, de észrevehető elméletteremtő szándéka több dolgozatában is, így pl. a *Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete* (1954), *a Zetafunktionen in der Algebra* (1955) és a Schreier bővítésekről írt számos dolgozatában.

Legjelentősebb dolgozatának az *Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen* (1950) munkáját tarthatjuk, amelyben bebizonyítja, hogy az egyetlen másodrendben nemkommutatív páros rendű egyszerű csoport az ikozaéder (azaz az A_5 alternáló) csoport. Ez, az annak idején „útszéli probléma" és megoldásának módszere vezetett Suzukin (1957) keresztül a híres Feit–Thompson-tételhez (1963). Tételének 15 oldalas bizonyítását, amelyet Rédei brüsszeli csipkéhez hasonlított, sem ő, sem más nem tudta egyszerűsíteni.

Nemcsak a magyar algebristákra volt hatással pályája csúcsán. Az ő munkásságát folytatva habilitált a német Hanns Weinert és doktorált a holland Leo van Leeuwen, meg az angol Arthur Sands (a sors úgy hozta, hogy mindhárman társszerzőim lettek az évek folyamán).

Algebra I című könyvének eredeti, 1954-es magyar nyelvű kiadásának 1959-es német változatát lényegesen átdolgozta és bővítette. Gyakran idézik ezt a monográfiát, illetve angol nyelvű fordítását ma is, mert rengeteg olyan eredmény van benne, amely másutt nem található. Mégsem vált alapművé ez a munka, az algebra nem olyan irányba fejlődött, ahogyan azt e mű sugallta.

Rédei munkássága ma sem vesztette aktualitását. Néhány kiragadott példa.

Az univerzális algebrában a függvényteljességi vizsgálatok kiindulópontja lett Szele Tiborral közösen írt, 1947-ben megjelent dolgozatának az az eredménye, miszerint a kommutatív gyűrűk varietásában pontosan a véges testek azok, amelyek felett minden függvény polinomfüggvény („Es gibt außer den endlichen Körpern überhaupt keine kommutativen Ringe R, in denen sämtliche Funktionen durch die Polynome $f(x) \in R[x]$ angegeben werden können")[5]. Az ilyen irányú vizsgálatokban élenjáró szerepet játszott a bécsi Wilfried Nöbauer algebrai iskolája. Ugyancsak szivesen idézik Rédeinek a véges testek elméletében elért eredményeit az osztrák

[5]A véges testeken kívül nincsen olyan R kommutatív gyűrű, amelyben valamennyi függvény egy $f(x) \in R[x]$ polinommal adható meg.

kriptográfusok. (A kriptográfia az algebrának, ezen belül főleg a véges testelméletnek egy olyan alkalmazási területe, amellyel sok pénzt is lehet keresni, pl. egy public key system révén, mint amilyen a Rivest–Shamir–Adleman (1978), vagy az ElGamal (1985) public key system.)

Állandóan idézik Rédei munkáit a véges Abel-csoportok faktorizációjával foglalkozó kutatók, többek között Corrádi Keresztély, Arthur Sands és Szabó Sándor.

Rédei elméletteremtő ereje megmutatkozott abban is, ahogyan a háromszög nevezetes pontjait vizsgálta. „Seit Anfang des vorigen Jahrhunderts wurden nach und nach etwa zwanzig Arten weiterer merkwürdiger Punkte entdeckt und viele ihrer Eigenschaften weitläufig untersucht, jedoch wurde eine systematische Theorie der merkwürdigen Punkte, wohl wegen gewisser eigenartiger Schwierigkeiten, bisher nicht begründet, nicht einmal eine allgemeine Definition wurde für sie aufgestellt. Das soll hier in möglicher Kürze geschehen."[6] – írja Algebra könyve német kiadásának (Geest & Portig, Leipzig 1959) 180. fejezetében. Bizony nem magyarul gondolkodott, amikor ezeket a szabatos, gördülékeny német sorokat fogalmazta. Az általa definiált nevezetes pontok teljes leírását az idézett könyv 441. tétele (a 711. oldalon) adja meg. Ezt a szép eredményét, sajnos, máshol nem közölte, így a szakmai közvélemény szinte tudomást sem vett róla.

Az ideál fogalma nem tranzitív reláció, ez sok gondot okoz a gyűrűelméletben. Mario Petrich (1985), Arthur Sands (1988) és Stefan Veldsman (1991) munkái nyomán szükséges és elégséges feltételeket ismerünk az egy- vagy kétoldali ideálok tranzitivitására vonatkozóan. Az említett szerzők jó hasznát vették a Rédei által 1954-ben bevezetett dupla homotetizmusoknak. Y. C. Chen és K. P. Shum (1999) egy bizonyos algebrakonstrukciónál is Rédei barátságos dupla homotetizmusait használta.

*

A tiszta matematika fejlődésének egy tipikus fonalát tükrözi Rédei hézagos polinomokra vonatkozó vizsgálatainak eredete és utóélete, amely a matematika legelméletibb jellegű kérdésein keresztül vezet valódi, talán sohasem remélt alkalmazásokig a véges geometriában (amely utóbbi jelentős szerephez jut mind a kódelméletben, mind a kriptográfiában).

Hajós – doktorálni akarván – Minkowskinak a homogén lineáris diofantikus egyenlőtlenség-rendszerekre vonatkozó sejtésével kezdett foglalkozni. Minkowski sejtésének létezett egy n-dimenziós térbeli geometriai átfogalmazása. Hajós ezt fogalmazta át véges Abel-csoportok faktorizációs problémájává, és ez utóbbit sikerült is megoldania. Rédeinek megtetszett a Minkowski–Hajós-tétel kérdésköre, Hajós 27 oldalas bizonyítását sikerült 4 oldalasra rövidítenie, majd a Hajós-féle elméletet lényegesen továbbfejlesztenie. Így jutott el a prímtestek feletti hézagos polinomokhoz. „Vor über 20 Jahren habe ich erkannt, daß die Fortsetzung der von

[6] A múlt század kezdete óta rendre mintegy húszféle további nevezetes pontot fedeztek fel, és messzemenően vizsgálták sok tulajdonságukat, mégsem alapozták meg, bizonyos sajátságos nehézségek miatt, a nevezetes pontok elméletét, sőt még általános definíciójukat sem adták meg. Ezt itt lehetőség szerint röviden megtesszük.

Hajós ins Leben gerufenen Faktorisationstheorie der endlichen abelschen Gruppen durch die Bestimmung gewisser zerfallender lückenhafter Polynome über endlichen Primkörpern ermöglicht wird. Derselben Quelle ist eine Reihe unerwarteter neuartiger Anwendungen auf sehr verschiedenen Gebieten der Algebra und Zahlentheorie entsprungen"[7] – írja Rédei Lückenhafte Polynome über endlichen Primkörpern (Akadémiai Kiadó, 1970) könyvének előszavában.

Lovász Laci vette észre először, hogy Rédeinek a hézagos polinomokra vonatkozó eredményei alkalmazhatóak a véges geometriában. „The main geometric problem in Rédei's book – írja Szőnyi Tamás (Around Rédei's theorem, *Discrete Math.*, 208/209 (1999), 557–575) – is this: given a function f on $GF(p)$ how many different values can the difference quotient $\big(f(x) - f(y)\big)/(x - y)$ take? Geometrically this is equivalent to the following question. How many directions are determined by a set U of q points in the affine plane $AG(2, q)$? ... In case $p = q$ the answer to the main question is particularly attractive. Theorem (Rédei and Megyesi): A set of p points in $AG(2, p)$ is either a line or determines at least $(p + 3)/2$ directions."[8] Sok neves külföldi matematikuson kívül Gács András és Sziklai Péter is használják, élesítik Rédei eredményeit, és oldanak meg tőle származó problémákat további alkalmazások céljából.

Megkérdeztem Megyesi Lacit, gondolt-e tételük fontosságára és alkalmazhatóságára a véges geometriában. Válaszában Arany Jánost idézte: „gondolta a fene".

*

Rédei tudományos munkásságának igen jelentős részét teszi ki a számelmélet és az algebrai számelmélet. Ilyen irányú kutatásainak tudományos visszhangjáról és utóéletéről Győry Kálmán volt szíves informálni. Már életében sok külföldi kapcsolódott az euklideszi számtestekre vonatkozó kutatásaihoz, például A. Brauer (1940), Hua Lo-Keng (1945), P. Varnavides (1952), V. Ennola (1958), a Pell-féle egyenletek Rédei-féle elméletéhez pedig P. Morton (1979).

Legnagyobb hatású eredményei a kvadratikus számtestek osztálycsoportjával kapcsolatosak. Eredményeit sokan általánosították, alkalmazták, módszerét finomították már életében is, újabban pedig P. Morton (1982), J. Hurrelbrink (1994) és S. Akiyama (1994, „... in order to generalize results by C. F. Gauss and by L. Rédei ...")[9]. Többen foglalkoztak Rédeinek a Zsigmondy-tétellel kapcsolatos eredményeivel (például G. Steidl, M. Hänler és M. Tasche, 1989) és a körosztási polinomokra vonatkozó eredményeivel (például K. Johnson, 1988).

---

[7]Több mint 20 éve felismertem, hogy a véges Abel-csoportok Hajós által életre hívott faktorizációs elméletének a továbbfejlesztését a véges prímtestek feletti bizonyos széteső hézagos polinomok meghatározása teszi lehetővé. Ugyanebből a forrásból fakad egy sor váratlan és újszerű alkalmazás az algebra és számelmélet különböző területén.

[8]Rédei könyvében a fő geometriai probléma ez: egy $GF(p)$-n adott f függvény esetén hány különböző értéket vehet fel az $\big(f(x) - f(y)\big)/(x - y)$ differencia hányados? Geometriailag ez ekvivalens a következő kérdéssel. Hányféle irányt határoz meg a q pontból álló U halmaz az $AG(2, q)$ affin síkon? ... A $p = q$ eset különösen szép. Tétel (Rédei és Megyesi): $AG(2, p)$-ben egy p pontból álló halmaz vagy egyenes, vagy legalább $(p + 3)/2$ irányt határoz meg.

[9]... hogy általánosítsuk Gauss és Rédei eredményeit ...

*

Hosszú éveket töltött vidéken gimnáziumi tanárként, és ez idő alatt rengeteg tapasztalatot szerzett. Sohasem említette, hogy didaktikai kérdések foglalkoztatták volna, de néha megjegyezte: „sokáig tanítottam középiskolában". Meg nem valósult tervei között szerepelt jó középiskolai tankönyvek írása. Jóval halála után találtam rá két didaktikai tárgyú dolgozatára a Protestáns Tanügyi Szemlében (7 (1933), 10–16 és 32–33). Az elsőben egyebek mellett arra int, hogy „ne akarjuk mindenkor és mindenáron az átlagtanulóval a miniatűr zseni szerepét eljátszatni".

*

Érdekes és szinte csodálatos, ahogyan Rédei algebrai iskolája létrejött. Tulajdonképpen csupán kitűnő egyetemi előadásai ihlették meg néhány hallgatóját. Nem gyűjtötte maga köré jobb hallgatóit, nem tartott kutatószemináriumot, nem foglalkozott egyénileg tanítványaival, nem adott személyre szóló problémát, vagy feladatot. Közvetlen ember volt, aki örömmel beszélgetett matematikáról, és aki a kezdő kutatót is egyenrangú félnek tekintette. Rédei meghallgatta mások problémáit, eredményeit, de jobbadán arról beszélt, ami éppen foglalkoztatta: eredményről lelkesen, sejtésről optimistán, sikertelenségről lehangoltan. Szinte látszott, hogyan birkózik egy-egy tudományos kérdéssel, hogyan fejlődik az algebra munkája nyomán. Az általa felvetett problémával bárki foglalkozhatott, munkájába bárki bekapcsolódhatott, mégsem ez volt a jellemző. Lelkes tudományszeretetéből és folyamatosan intenzív kutatómunkájából fakadó személyes varázsa volt az, ami követésre késztette tanítványait.

Midőn kezdő vidéki tanárként a tanítás mellett kutatómunkát is szerettem volna folytatni, fel kellett mérnem, melyik az a tudományterület, amelyből a legtöbbet hoztam magammal, és amelyben teljes tudományos elszigeteltségemben is eredményes lehetek. Ez, Rédeinek köszönhetően, az algebra volt.

*

1980 augusztusában rövid hollandiai kitérővel Ausztráliába repültem 2 hónapra. Megállapodtunk egy november eleji napban, akkor jövök legközelebb a sakktáblával, így búcsúztam. Többé nem láttam. A megbeszélt napon már nem volt látogatható, az intenzív osztályon feküdt szívinfarktus után. Szentágothai gyorsan felkereste, és magas állami kitüntetést nyújtott át neki. 80. születésnapján, november 15-én, ünnepi ülésszakot tartottak az Akadémián, amelyen nem lehetett jelen. Néhány nap múlva örökre eltávozott.

A Kerepesi úti (hivatalosan a Mező Imre, ma Fiumei úti) temető akadémiai parcellájában helyezték el hamvait egy hideg december eleji napon. A temetésen volt évfolyamtársam, Csákány Béla búcsúztatta, aki utódja volt a JATE Algebra és Számelmélet Tanszékén.

*

Rédei kolléga urazta, kollegina kisasszonyozta hallgatóit. Orosházi tanárként, ha időm és anyagi helyzetem engedte, néha Szegedre utaztam, hogy elképzeléseimről, eredményeimről vele, Szendrei Jánossal, Szász Gáborral konzultáljak. Ekkor már tegezett, amely 1970-ig ötven százalékos volt. Mi fiatalabbak azonban továbbra is Professzor Úrnak szólítottuk. Mert nekünk ő továbbra is a klasszikus értelemben vett professzor úr maradt. Életre szóló élményt jelentett hallgatójának, tanítványának lenni. Sokunknak ennél is többet: vonzása, hatása alá kerültünk, és hivatásunknak választottuk az algebra művelését.

Richard Wiegandt: Rédei – personal recollections with historical background. László Rédei (1900–1980), professor at the University of Szeged, algebraist and number theorist of international reputation, founder of the Hungarian abstract algebra school.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas – Tel.: 77/421-344/153